

محمّدی در باره ی

« مائریس و درمیان »

لذا آنچه باینک برای حل مسائل در باره المائریس آنچه مقدار معادلات نوشته شده پس از دو باره شده و به هم میزنند
قدر مجهولات نیز افزاین میابد (مثلاً اگر به معادله نوشته شود به مجهول خواهیم داشت) جهت حل و بدست آوردن
مقادیر مجهولات نیازمند به روشی هستیم که بتوان با انجام عملیات بر داده ترسیم پاسخ یا جواب برسم از این رو
روش پیشنهادی، روش مائریس و درمیان که نسبتاً روش ساده تر به نظر میرسد مورد نظر واقع شده است.
با توجه به اینکه روش مائریس و درمیان را در درس پایه ریاضی یا هندسه کللی فرا گرفته اید، جهت یادآوری و یادگیری
مجدد و فهم و درک بهتر آن در جهت بکارگیری این فصل در حل مسائل از این روش خلاصه ای از مائریس و درمیان
بدست آورده و درمیان در روشهای مائریس را به همراه چند نمونه مثال در چند صفحه نوشته ام تا شاید

مشتی شمر سفید.

(ضمیمه جزوه محبتی در ۵۴)

ماتریس و درمیان : تعریف : ماتریس به جدولی مستطیلی شکل، شامل تعدادی اعداد حقیقی یا مختلط که به صورت

سطری و ستونی نوشته شده اند گفته می شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

→ نهان یک ماتریس با 3 سطر و 3 ستون

→ (مطلوبه) ماتریس 3x3

مثال 1:

به هر کدام از اعداد داخل ستون یک درایه گفته می شود

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3-i & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

→ ماتریس با 2 سطر و 3 ستون

→ ماتریس 2x3

مثلاً درایه a_{32} در ماتریس بالا به عددی است که در سطر 3 و ستون 2 نوشته شده عدد 7.

مثال 2: به حالتی خواهم دستگاه معادلات داده شده را به صورت یک ماتریس بنویسم.

$$\begin{cases} (1+i)x - 2y = 2 \\ x + (1-i)y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

① پارامترهای x و y مجهولات دستگاه هستند

② 2 و 3 طرف دیگر مساوی با سمت راست

در معادلات باید با بدست آوردن x و y

به آنجا برسیم

③ ضرایب x و y ماتریس اصلی را می نویسم. بنابراین با توجه به توضیحات فوق به هر کدام از اعداد گفته شده یک ماتریس می نویسم:

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \textcircled{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & (1-i) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & (1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

به نگاه در دستگاه معادله را برای حل از روش ماتریس

به صورت معادله می نویسیم:

نکته: بارفت در ماتریس نوشته شده در می بینیم اگر هر سطر را در ستون مجهولات ضرب کنیم معادله قبلی را می توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & (1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(1+i)x - 2y = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$$x + (1-i)y = 3$$

ماتریس در مرتبه 3
فرایب: مجهولات و دستگاه معادلات زیر را به صورت یک ماتریس بیان کنید.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y + 4z = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y + 4z = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y + 2z = 4 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

در ادامه با توجه به اینکه سیستمی نوشتن معادلات به ماتریس باید با نحوه حل یا به دست آوردن مجهولات در ماتریس آشنا شویم
در ابتدا هذکته در باب امکان جبری بر روی ماتریسها:

کما ضرب ماتریسها: ضرب یک عدد مانند C در یک ماتریس A را با CA نمایش می دهیم اگر تمام درایه ها ماتریس A را در عدد C ضرب کنیم به یک ماتریس CA می رسیم.

مثال: $C = 2$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow CA = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x1 & 2x(-2) & 2x3 \\ 2x7 & 2x4 & 2x(-6) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 14 & 8 & -12 \end{bmatrix}$

2/ جمع: اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند آنگاه مجموع دو ماتریس A و B را با A+B نمایش می دهیم و A+B ماتریس است که درایه ها آن
برابر مجموع درایه ها متناظر دو ماتریس A و B است!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & -1+5 \\ 0+4 & 1+(-6) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = ?$$

نکته 1: ماتریس هم مرتبه نیستند و در این صورت؟ دستور را به هم نمی برسانیم.
نکته 2: درایه های اعدادی که در ماتریس نوشته شده در سطرها و ستون ها
باید حل شیت چون مرتبه ماتریسها با هم برابر نیست

$$A_{2 \times 2} \neq B_{2 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B$$

نکته 3: هنگام جمع دو ماتریس، یک ماتریس هویت را فرستاده می شود.
نکته 4: ماتریس هویت ماتریس است که تمام درایه های آن هویت (1) است.

$$\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 2+(-2) & 5+(-5) \\ 3+(-3) & 1+(-1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

مثال: حاصل ضرب زوج ماتریسها قابل را در صورت آنکه لایه ها برابر است.
 $\Rightarrow A \times B = (1 \times 4) + (2 \times 5) + (3 \times 6) = 32$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C \times D = ?$$

قول حل شیت چون تعداد ستونهای ماتریس C
باید با تعداد سطرهاي ماتریس D برابر شیت لذا حاصل ضرب تعریف نمی شود

3/ تراشه ها! اگر ماتریس A ماتریس $n \times m$ باشد، آنگاه تراشه های ماتریس A را A^T می گویند و این ماتریس $m \times n$ است. از مرتبه $n \times m$ که درایه ها در سطح n و ستون m قرار دارند و در سطح m و ستون n قرار دارند. معادله سادو تر: جایی که سطرها و ستونها را بهم عوض می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & \pi & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & \pi \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

سطرهای 1 ستون 1
سطرهای 2 ستون 2
ستون 1 سطر 1
ستون 2 سطر 2

4/ دترمینان: نوعی تابع است که به هر ماتریس مربع A یک عدد نسبت می دهد. دترمینان ماتریس A را $|A|$ یا $\det(A)$ می گویند.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

— فرض کنید A یک ماتریس مربع 2×2 باشد در این صورت دترمینان A به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (1 \times 4) - (2 \times 3) \Rightarrow |A| = -2$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

— فرض کنید A یک ماتریس مربع 3×3 باشد در این صورت دترمینان A به صورت زیر خواهد بود:

① ابتدا سطر اول را انتخاب می کنیم، یعنی هر کدام از سطرهای A را به سطر اول تبدیل می کنیم.

② سپس سطرهای انتخاب شده و ستونهای به ترتیب حذف کرده و درایه های آنرا به شکل زیر می نویسیم:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

بهر صورت سطر سوم را انتخاب می کنیم،

$$\textcircled{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow |M_{31}| = (-2 \times -3) - (2 \times 1) \Rightarrow 6 - 2 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow |M_{32}| = (1 \times -3) - (2 \times 4) \Rightarrow -3 - 8 = -11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |M_{33}| = (1 \times 1) - (-2 \times 4) \Rightarrow 1 + 8 = 9$$

بنابراین طبق قانون، دترمینان ماتریس A به صورت زیر می آید:

$$|A| = (-1)^{3+1} \times \textcircled{2} \times 4 + (-1)^{3+2} \times \textcircled{-11} \times (-1) + (-1)^{3+3} \times \textcircled{9} \times 1 \Rightarrow$$

$$|A| = (-1)^4 \times 8 + (-1)^5 \times (-11) + (-1)^6 \times 9 \Rightarrow |A| = 8 + 11 + 9 = 28$$

توجه: $(-1)^{3+1}$ به سطر اول و ستون اول اشاره دارد. $(-1)^{3+2}$ به سطر اول و ستون دوم اشاره دارد. $(-1)^{3+3}$ به سطر اول و ستون سوم اشاره دارد.

4

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{11} = ?$$

مثال 2: درستی ماتریس مقابل را بدست آورید. (با حذف سطر اول)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = (1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = (1) [(1 \times 1) - (-3 \times 1)]$$

$$M_{11} = (1)(1 + 3) = 5$$

$$M_{12} = ?$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{12} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (-2) [(4 \times 1) - (-3 \times 2)]$$

$$\Rightarrow (-2) [4 + 6] = -20$$

$$M_{13} = ?$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{13} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (2) [(4 \times 1) - (1 \times 2)]$$

$$\Rightarrow 4$$

$$|A| = (-1)^{1+1} M_{11} + (-1)^{1+2} M_{12} + (-1)^{1+3} M_{13} \Rightarrow (-1)(5) + (-1)(-20) + (-1)(4)$$

$$= (-1 \times 5) + (-1 \times -20) + (-1 \times 4)$$

$$= 5 + 20 + 4 = 29$$

4-2 روش ساروس برای محاسبه درستی از مرتبه 3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

1) ابتدا سطر اول و دوم ماتریس را به شکل زیر در کنار ماتریس A قرار دهیم:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

Diagram showing the first two rows repeated to the right of the matrix for Sarrus' rule.

2) عناصر دایره بزرگ را در هم ضرب کرده و با هم جمع کنیم

$$aek + bfg + c.dh$$

(از چپ به راست و از بالا به پایین)

$$bdk + afh + ceg$$

3) سپس عناصر دایره کوچک که از راست به چپ و از بالا به پایین کشیده شده در هم ضرب و با هم جمع کنیم

$$|A| = (aek + bfg + cdh) - (bdk + afh + ceg)$$

4) در نهایت درستی ماتریس A به روش فوق به قدرت زیر بدست می آید:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Diagram showing the application of Sarrus' rule to the given matrix A.

مثال 3: درستی ماتریس مقابل را از روش ساروس بدست آورید.

$$|A| = [(1 \times 1 \times 3) + (2 \times 0 \times 3) + (-1 \times 4 \times -1)] - [(2 \times 4 \times 0) + (1 \times 0 \times -1) + (-1 \times 1 \times 3)]$$

$$\Rightarrow |A| = +4 + 3 \Rightarrow |A| = 7$$

— بحر حل دستگاه معادلات ۱۱ معادله ۱۱ مجهول، حدیث و وجه دارد؛

2/ روش حل مارتسی

3۔ روش حل کراہی

و، استفاده از عبارات ساده شده و تعداد بیت آهسته برای مجهول اول، تعدادی قصه مجهولات نثری به صورت

۶/ بخش حل مارتسی : اگر فرض کنیم در آن صورت زیر بند آنها را مرتب کرده و بفرم مارتسی بخش هشتم :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

دکھو خدا را امر تو ای صمدت زیر نمانش دارد :

$$Ax = B$$

$\alpha_{nm} \rightarrow$ α متن m و n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

برای یقین ماتریس A را حاصل ضرب در ماتریس I را انجام دهیم:

$$\text{cof } A = \begin{vmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} \end{vmatrix}$$

! ماترس هم عامل ہے A را با بناد $\cos \theta A$ نشان و آراء قدرت زیر تفسیر مہم :

در آن A_{11} در شیار سیست که از شیار اول است و در آن A_{12} در شیار دوم است و در آن A_{21} در شیار اول است و در آن A_{22} در شیار دوم است

۱۵۸۲

۲- تراها ده ماتریس هم عاملها را با $adj A$ نشان بدهیم در آن ماتریس الحاقی که به صورت زیر بدست می آید:

$$adj A = (cof A)^T = \begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} \end{bmatrix}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{bmatrix}$$

۳- در این صورت ماتریس معکوس A از ذیل زیر بدست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

سؤال: ماتریس معکوس A را به روشی فوق بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

۱- ابتدا ماتریس هم عامل های A را بدست می آوریم:

$$cof A = \begin{bmatrix} -3 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ +6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$adj A = (cof)^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & +6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۲- تراها ده ماتریس هم عامل ها:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳- در ساید ماتریس A را بدست می آوریم:

$$\Rightarrow \left[(1 \times 0 \times 1) + (2 \times 3 \times 1) + (1 \times 1 \times 1) \right] - \left[(1 \times 0 \times 0) + (1 \times 3 \times 1) + (2 \times 1 \times 1) \right] = 1 - 5 = -4$$

$$|A| = -4$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|-4|} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ +6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{6}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{6}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

مثال

نکته: دستگاه معادله خطی معادلات را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید:

$$\begin{cases} \text{معادله (1)} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ \text{معادله (2)} & x_1 + 3x_3 = 4 \\ \text{معادله (3)} & x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

حل: ابتدا فرم ماتریسی دستگاه معادله خطی را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} \downarrow x_1 & \downarrow x_2 & \downarrow x_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ماتریس ضرایب $\downarrow$ ماتریس مجهول $\downarrow$ ماتریس معلوم

در ابتدا به ماتریس معکوس A را بدست آوریم:

$$\text{cof} A = \begin{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{cof} A = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ +6 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

پس ترانپوز می‌گیریم هم عامل را می‌نویسیم:

$$\text{adj} A = (\text{cof})^T = \begin{vmatrix} -3 & -1 & +6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

بعد درشت ماتریس A را بدست می‌آوریم: (از روش ساروس)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (1 \times 0 \times 1) + (2 \times 3 \times 0) + (1 \times 1 \times 1) - [(1 \times 0 \times 0) + (1 \times 3 \times 1) + (2 \times 1 \times 1)] = 1 - 5 = -4$$

در این قسمت ماتریس معکوس را بدست می‌آوریم:

$$|A| = -4 \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj} A \Rightarrow \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} -3 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{6}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{vmatrix}$$

نهایتاً به ترس مجهول خواهیم داشت:

$$x = A^{-1} B = \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$$x = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{6}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \left(\frac{3}{4} \times 4\right) + \left(\frac{1}{4} \times 4\right) + \left(-\frac{6}{4} \times 2\right) \Rightarrow x_1 = 3 + 1 - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{4} \times 4\right) + \left(-\frac{1}{4} \times 4\right) + \left(-\frac{2}{4} \times 2\right) \Rightarrow -1 - 1 = -2$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{4} \times 4\right) + \left(\frac{1}{4} \times 4\right) + \left(\frac{2}{4} \times 2\right) = -1 + 1 + 1 = 1$$

روش حل گرامر: یکی از کارهای بسیار جالب در میان، حل دستگاه معادلات خطی به کمک روش گرامر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

① در این روش ابتدا درمیان ماتریس (ماتریس) را بدست می آوریم.

$$|A| = [(a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) - (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) - (a_{12} \times a_{21} \times a_{33})]$$

② در این روش آوردن مقادیر x_1 و x_2 و x_3 به صورت جداگانه مقادیر b_1 ، b_2 و b_3 را در ستونهای ماتریس اصلی جایگذاری کرده و طبق فرمول زیر بدست می آوریم.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \Rightarrow$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = [(b_1 \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times b_3) + (a_{13} \times b_2 \times a_{32}) - (a_{13} \times a_{22} \times b_3) - (b_1 \times a_{23} \times a_{32}) - (a_{12} \times b_2 \times a_{33})]$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \Rightarrow \frac{|A_2|}{|A|} \Rightarrow \dots$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} \Rightarrow \frac{|A_3|}{|A|} \Rightarrow \dots$$

ص ۱۱۱

مثال: دستگاه معادلات زیر را به کمک روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[(3 \times 1 \times -1) + (-1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times -1) - (1 \times 1 \times 1) + (3 \times 1 \times -1) + (-1 \times 1 \times -1) \right]$$

$$\Rightarrow -3 - 1 - 1 - (1 - 3 + 1) = -5 - (-1) = -5 + 1 = -4$$

$$\boxed{|A| = -4}$$

حال درمیان ماتریسهای A_1 و A_2 و A_3 را که به ترتیب از مقوفین ستونی اول، دوم، سوم ماتریس ضرایب به ماتریس سمت راست

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A_1| = -4 + 4 - 6 - (6 - 4 - 4) = -4$$

$$\boxed{|A_1| = -4}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A_2| = -18 + 4 - 4 - (-4 - 12 + 6) = -18 + 10 = -8 \quad \boxed{|A_2| = -8}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A_3| = -12 - 6 - 4 - (4 - 18 + 4) = -22 + 10 = -12 \quad \boxed{|A_3| = -12}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-4} = 1$$

پایان

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-12}{-4} = 3$$

کے لیے معادلات زیر راہ پیش ماتریس معکوس حل بنائیے۔

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ x + y = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

درستی $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow [(2 \times 1 \times 1) + (0 \times 0 \times 3) + (1 \times 1 \times 2)] - [(1 \times 1 \times 1) + (2 \times 0 \times 2) + (1 \times 1 \times 3)] = 1$

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} |1 & 0| & |1 & 0| & |1 & 1| \\ |2 & 1| & |3 & 1| & |3 & 2| \\ |1 & 1| & |2 & 1| & |2 & 0| \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Cof } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = (\text{Cof } A)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x + (1 \times 2) + (2 \times 3) + (-1 \times 1) = \frac{7}{1}$$

$$\text{و} (-1 \times 2) + (-1 \times 3) + (1 \times 1) = -2$$

$$2 \times (-1) + (-4 \times 2) + (2 \times 1) = -7$$

نتیجہ: دیگہ معادلات زیر راہ انشاد از روشهای ماتریس معکوس و کرامر حل بنائیے (از هر دو روش)

الف) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x - y + 2 = 6 \\ 3x + y - 2 = 7 \\ -x + y + 7z = 6 \end{cases}$