



خزوه درس

الکترو مغناطیس

(برای دانشجویان کارشناسی)

تدوین و گردآوری: مهدی جعفری تیده نوئی

شما خودتان جوان بانی هستید که می‌توانید همه کارها را انجام بدهید. مخترعین مایمی توانستند در سطح بالا اختراع بکنند، مبتکرین مایمی توانستند در سطح بالا ابتکار بکنند به شرط این که اعتماد به نفس خودشان داشته باشند.

مقام معظم رہبری:

ما به علم احتیاج داریم، اما به پنجه کار آمد هم احتیاج داریم.

کار بدون علم، کم اثر است؛ علم بدون کار، بی اثر است.

فصل اول

آمالیز برداری

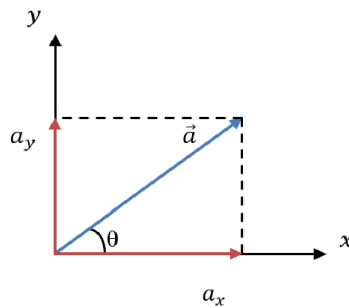
در مطالعه الکتریسیته و مغناطیس می‌توانیم با به کار بردن نمادهای آنالیز برداری، تا حد زیادی پیچیدگی نماد گذاری‌ها را کاهش داده و مفاهیم فیزیکی موجود در معادلات را نشان دهیم.

تقسیم‌بندی کمیت‌ها

- کمیت نرده‌ای (عددی - اسکالر): کمیتی که فقط دارای اندازه باشد (فقط با عدد بیان شود). مانند: جرم - طول - زمان.
- کمیت برداری: کمیتی که علاوه بر اندازه، دارای جهت نیز باشد. مانند: سرعت - شتاب - نیرو.

۱-۲- تجزیه بردار در دستگاه دو مؤلفه‌ای

طبق شکل ۱-۱، بردار $\vec{a}$ را می‌توان به دو مؤلفه a_x و a_y تجزیه کرد.



a_x : مؤلفه افقی بردار $\vec{a}$

a_y : مؤلفه عمودی بردار $\vec{a}$

شکل ۱-۱- مؤلفه‌های افقی و عمودی بردار $\vec{a}$

رابطه‌ها:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a_y}{a} \Rightarrow a_y = a \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a_x}{a} \Rightarrow a_x = a \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x}$$

بردار یکه

بردار یکه برداری است به طول واحد و در جهت مؤلفه‌های بردار اصلی.

نکته: بردار یکه در جهت مؤلفه افقی را با $\vec{i}$ و بردار یکه در جهت مؤلفه قائم را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند و داریم:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

- به a_x و a_y مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ گویند.

برآیند دو بردار

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

به جمع دو بردار، بردار برآیند گویند و داریم:

مثال ۱-۱- بردار برآیند را بر حسب مؤلفه‌ها و بردارهای یکه بنویسید.

اندازه بردار برآیند

الف) اندازه برآیند دو بردار هم جهت a و b : $r = |a + b|$

ب) اندازه برآیند دو بردار خلاف جهت a و b : $r = |a - b|$

ج) اندازه برآیند دو بردار زاویه دار a و b : $r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$

د) اندازه برآیند دو بردار عمود بر هم a و b : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ه) اندازه برآیند دو بردار زاویه دار و هم اندازه a و b : $r = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$

تفاضل دو بردار

تفاضل دو بردار را با نماد $\vec{c}$ نمایش می‌دهیم و داریم: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

اندازه تفاضل

الف) اندازه تفاضل دو بردار هم جهت a و b : $c = |a - b|$

ب) اندازه تفاضل دو بردار خلاف جهت a و b : $c = |a + b|$

ج) اندازه تفاضل دو بردار زاویه دار a و b : $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$

د) اندازه تفاضل دو بردار عمود بر هم a و b : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

ه) اندازه تفاضل دو بردار زاویه دار و هم اندازه a و b : $c = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$

نکته: اگر زاویه بین دو بردار قائمه باشد، اندازه برآیند دو بردار با اندازه تفاضل دو بردار برابر می‌باشد.

۱۱- رسم برآیند و تفاضل دو بردار:

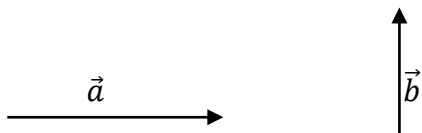
برای رسم برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- ۱- از یک نقطه فرضی، برداری موازی، مساوی و هم‌جهت بردار اول رسم می‌کنیم.
- ۲- از انتهای بردار اول، برداری موازی، مساوی و هم‌جهت بردار دوم رسم می‌کنیم.
- ۳- بردار برآیند برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل کند.

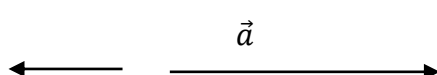
برای رسم تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیز مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- ۱- از یک نقطه فرضی، برداری موازی، مساوی و هم‌جهت بردار اول رسم می‌کنیم.
- ۲- از انتهای بردار اول، برداری موازی، مساوی و **خلاف** جهت بردار دوم رسم می‌کنیم.
- ۳- بردار تفاضل برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل کند.

مثال ۱-۲- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به ترتیب ۳ و ۴ واحد مطابق شکل مفروض می‌باشند. بردارهای برآیند و تفاضل را رسم کرده و اندازه آنها را به دست آورید.



تمرین ۱-۱- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به ترتیب ۵ و ۲ واحد مطابق شکل مفروض می‌باشند. بردارهای برآیند و تفاضل را رسم کرده و اندازه آنها را به دست آورید.



دایره مثلثاتی

- $\cos \theta$ در ناحیه‌های ۱ و ۴ دایره مثلثاتی، مثبت است.
- $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos \theta$
- $\cos 120^\circ = \cos(\pi - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$
- $\sin \theta$ در ناحیه‌های ۱ و ۲ دایره مثلثاتی، مثبت است.

جدول زاویه‌ها

جدول ۱-۱- سینوس، کسینوس و تانژانت بعضی از زوایای خاص

α	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱

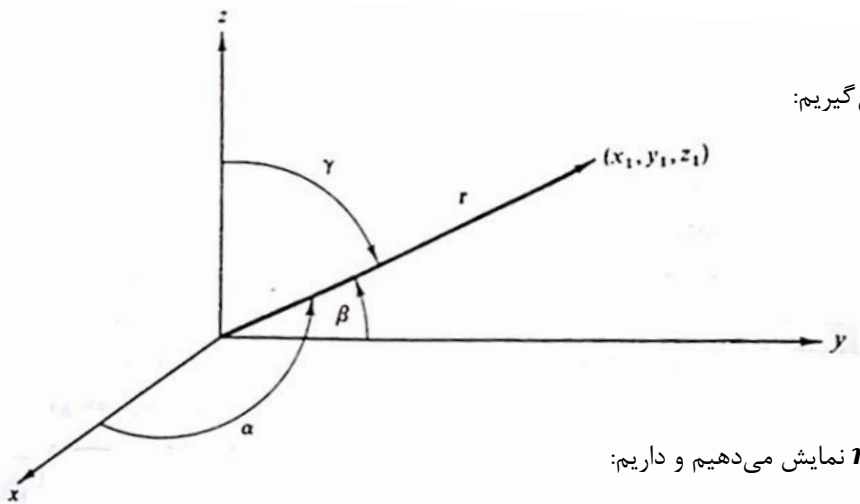
مثال ۱-۳- اندازه برآیند دو نیروی $\vec{F}_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 8\vec{j}$ را محاسبه کرده و زاویه بین نیروی برآیند با محور x را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۲- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ و $\vec{r} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ و $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ باشد، با محور x چه زاویه ای می سازد؟

تمرین ۱-۳- مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برداری در جهت مثبت محور Y و هم اندازه با بردار $\vec{a}$ است. اگر $\vec{a} = 9\vec{i} + 12\vec{j}$ باشد، اندازه $\vec{a} - \vec{b}$ را بدست آورید.

۱-۳- تجزیه بردار در دستگاه سه مؤلفه‌ای

دستگاه مختصات دکارتی (قائم) مقابل را در نظر می گیریم:



جابه جایی از مبدأ تا نقطه (x_1, y_1, z_1) را با بردار $\mathbf{r}$ نمایش می دهیم و داریم:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

شکل ۱-۲- کسینوس های هادی

• به کمیت های x_1 و y_1 و z_1 مؤلفه های $\mathbf{r}$ یا تصویرهای $\mathbf{r}$ گویند.

بزرگی یا اندازه بردار $\mathbf{r}$ را با r نمایش می دهیم که عبارت است از:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

بین بزرگی بردار $\mathbf{r}$ و مختصات نقطه انتهایی، رابطه های زیر برقرار است:

$$x_1 = r \cos \alpha \quad \text{و} \quad y_1 = r \cos \beta \quad \text{و} \quad z_1 = r \cos \gamma$$

به $\cos \alpha$ و $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ ، کسینوس های هادی گویند.

همچنین برای هر برداری مانند $\mathbf{A}$ می توانیم بنویسیم:

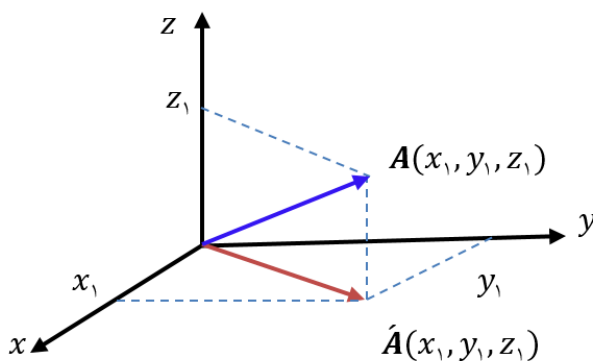
$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

که در آن:

$$A_x = A \cos \alpha$$

$$A_y = A \cos \beta$$

$$A_z = A \cos \gamma$$



شکل ۱-۳- مؤلفه های دکارتی (قائم)

۴-۱- ضرب نرده ای (عددی - اسکالر - نقطه ای)

اینک در پی تعریف بردارها، به ترکیب آن‌ها با یکدیگر اقدام می‌کنیم.

بردارهای یکه i و j و k در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$j \cdot i = i \cdot k = k \cdot j = 0$$

برای ضرب نرده ای دو بردار A و B داریم:

$$A \cdot B = (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k) =$$

$$A_x B_x (i \cdot i) + A_y B_y (j \cdot j) + A_z B_z (k \cdot k) + \dots \Rightarrow$$

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت که اولاً ضرب اسکالر دو بردار، اسکالر است (عدد است) و ثانیاً تعویض پذیر است یعنی:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

• اگر جهت محورهای را طبق شکل ۴-۱ چنان تغییر دهیم که A روی محور x قرار گیرد، با توجه به رابطه $A \cdot B$ داریم:

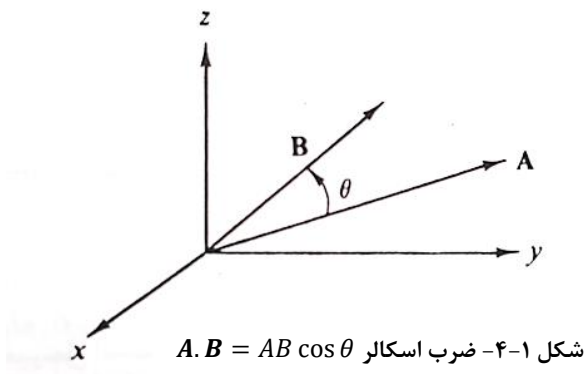
$$A_x = A \quad \text{و} \quad A_y = 0 \quad \text{و} \quad A_z = 0 \quad \text{و} \quad B_x = B \cos \theta$$

بنابراین برای $A \cdot B$ داریم:

$$A \cdot B = AB \cos \theta$$

کاربرد:

• رابطه بین کار W ، نیروی F و جابه‌جایی d : $W = F \cdot d$



تمرین ۴-۱- به روشی دیگر ثابت کنید $A \cdot B$ کمیتی اسکالر است.

• کمیت اسکالر یعنی کمیتی که تحت چرخش دستگاه مختصات، ناوردا باشد.

مثال ۱-۴- کسینوس زاویه بین دو بردار $A = 3i + 4j + k$ و $B = i - j + k$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۴- کسینوس زاویه بین دو بردار $A = i - j + \sqrt{2}k$ و $B = \sqrt{2}i + j - k$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۵- سه بردار $P = 3i + 2j - k$ و $Q = -6i - 4j + 2k$ و $R = i - 2j - k$ مفروض است. تعیین کنید از بین این

سه بردار، کدام دو بردار:

الف- بر هم عمودند؟

ب- موازی‌اند؟

ج- پاد موازی‌اند؟

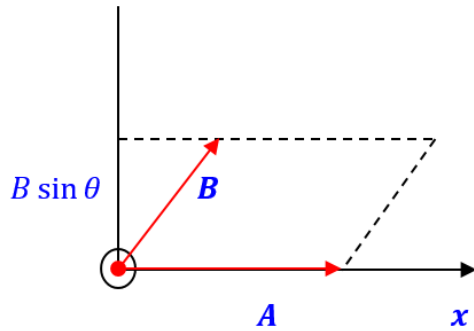
۵-۱- ضرب برداری

حاصل ضرب برداری دو بردار A و B ، بردار دیگری است مانند C و داریم:

$$C = A \times B \Rightarrow C = AB \sin \theta$$

بردار C هم بر A و هم بر B عمود است. به عبارتی دیگر، A و B و C ، دستگاه راستگردی را تشکیل می‌دهند.

به بیان دیگر اگر A و B اضلاع یک متوازی الاضلاع و A قاعده آن باشد، $B \sin \theta$ ارتفاع آن می‌شود. در نتیجه، کمیت $C = AB \sin \theta$ ، مساحت این متوازی الاضلاع می‌شود که برداری است عمود بر صفحه متوازی الاضلاع.



شکل ۵-۱- نمایش متواری الاضلاع مربوط به ضرب برداری

کاربردها:

- رابطه بین تکانه خطی p و تکانه زاویه‌ای L : $L = r \times p$
- رابطه بین سرعت خطی v و سرعت زاویه‌ای ω : $v = \omega \times r$
- رابطه نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک: $F_B = qv \times B$

ضرب برداری دو بردار، تعویض پذیر نیست (خاصیت پاد جابه‌جایی دارد) یعنی:

$$A \times B = -(B \times A)$$

همچنین بردارهای یک‌ه i و j و k در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k \quad \text{و} \quad j \times k = i \quad \text{و} \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k \quad \text{و} \quad i \times k = -j \quad \text{و} \quad k \times j = -i$$

برای ضرب برداری $C = A \times B$ تعریف دیگری نیز وجود دارد که مؤلفه‌های C را مشخص می‌کند. این مؤلفه‌ها را می‌توان با استفاده از دترمینان مشخص کرد:

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)i - (A_x B_z - A_z B_x)j + (A_x B_y - A_y B_x)k \Rightarrow$$

$$c_x = (A_y B_z - A_z B_y)$$

$$c_y = -(A_x B_z - A_z B_x)$$

$$c_z = (A_x B_y - A_y B_x)$$

مثال ۵-۱-۱ اگر $A = 6i + 4j + 3k$ و $B = 2i - 3j - 3k$ باشند، بردار $C = A \times B$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۶- اگر $A = -2i - 4j + 6k$ و $B = -i - j + 2k$ باشند، $A \times B$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۸-

الف- بردار A را چنان بیابید که بر دو بردار زیر عمود باشد.

$$U = 2i + j - k$$

$$V = i - j + k$$

ب- بردار A چگونه برداری باشد تا علاوه بر عمود بودن بر دو بردار فوق، دارای اندازه واحد نیز باشد؟

تمرین ۱-۸- با استفاده از رابطه $C = A \times B$ و حاصل ضرب $C \cdot C$ ، نشان دهید $C = AB \sin \theta$.

۱-۶- ضرب‌های سه گانه

ضرب سه گانه نرده‌ای

$$D = A \cdot B \times C = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -B \cdot A \times C$$

- در این ضرب سه گانه از پرانتز استفاده نمی‌کنیم چون ضرب برداری یک کمیت نرده‌ای در بردار، تعریف نشده است.
- ضرب سه گانه نرده‌ای، حجم متوازی السطوحی است که توسط بردارهای A و B و C ، تعریف شده باشد.
- یکی از کاربردهای مهم و جالب توجه ضرب سه گانه اسکالر، ساختن شبکه وارون بلور است که در فیزیک حالت جامد به کار می‌رود.

مثال ۱-۵- حجم متوازی السطوحی را که توسط بردارهای زیر تعریف شده است، محاسبه کنید.

$$A = i + 2j - k$$

$$B = j + k$$

$$C = i - j$$

$$D = A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

رابطه فوق به قاعده **بک - کب** مشهور است.

مثال ۱-۶- بردار حاصل از ضرب سه گانه برداری را برای بردارهای زیر به دست آورید.

$$A = i + 2j - k$$

$$B = j + k$$

$$C = i - j$$

تمرین ۱-۹- سه بردار A و B و C به صورت زیرمفروضند.

کمیت‌های الف - $B \cdot A \times C$ و ب - $B \times (C \times A)$ را به دست آورید.

عملگر دیفرانسیلی برداری گرادیان (∇)

اگر $\varphi(x, y, z)$ یک تابع نقطه ای اسکالر باشد، به $\nabla\varphi$ ؛ دل φ یا گرادیان تابع اسکالر φ می‌گویند.

∇ یک عملگر دیفرانسیلی است که بر روی اسکالر φ عمل می‌کند یا از آن مشتق می‌گیرد و آن را به بردار تبدیل می‌کند.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}$$

• یکی از کاربردهای گرادیان، بیان رابطه بین میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و پتانسیل اسکالی φ است:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow \text{میدان} = -\nabla(\text{پتانسیل})$$

مثال ۷-۱- اگر $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $f(r)$ تابعی از r باشد، گرادیان $f(r)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۱۰- اگر $s(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{2}{3}}$ باشد، تعیین کنید:

الف- ∇s و $|\nabla s|$ در نقطه $(1, 2, 3)$

ب- کسینوس‌های هادی ∇s در نقطه $(1, 2, 3)$

تمرین ۱-۱۱- اگر $\nabla(A \cdot r) = A$ برداری ثابت باشد، نشان دهید که

تمرین ۱-۱۲- بردار یکه عمود بر سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ را در نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید.

عملگر دیفرانسیلی اسکالر دیورژانس ($\nabla \cdot$)

اگر F برداری مفروض باشد، به $\nabla \cdot F$ واگرایی F یا دیورژانس F می گویند .

دیورژانس یک تابع نردهای نقطه‌ای است و در نقطه حدى سطح انتگرال گیری تعريف می شود. (با عمل روى بردار، آن را به اسکالر تبدیل می کند) .

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

• یکی از کاربردهای دیورژانس، معادله پیوستگی می باشد:

این معادله بیان می کند که شارش به خارج حجم باعث کاهش چگالی درون حجم می شود.

• ρ تابعی از زمان و مکان است: $\rho(x, y, z, t)$

دیورژانس در مسائل گوناگون فیزیک از جمله چگالی جریان احتمالی در مکانیک کوانتومی و نیز نشت نوترون در رآکتور هسته‌ای ظاهر می شود.

مثال ۱-۸- $\nabla \cdot \mathbf{r}$ را محاسبه کنید.

مثال ۱-۹- حاصل عبارت $\nabla \cdot \mathbf{r} f(r)$ را به دست آورید.

$$\nabla \cdot (f\mathbf{V}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{V} + f \nabla \cdot \mathbf{V}$$

تمرین ۱-۱۳- اگر f تابعی اسکالر و $\mathbf{V}$ یک تابع برداری باشد نشان دهید:

عملگر دیفرانسیلی برداری کرل ($\nabla \times$)

اگر $\mathbf{V}$ یک بردار مفروض باشد، $\nabla \times \mathbf{V}$ را کرل $\mathbf{V}$ یا تاو $\mathbf{V}$ می‌گویند و داریم:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_x \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \mathbf{k}$$

چرخش پیرامون سطح دیفرانسیلی در صفحه xy ، برابر مؤلفه z بردار $\nabla \times \mathbf{V}$ است.

$\nabla \times \mathbf{V}$ در نقطه (x, y, z) را می‌شود از طریق نصب یک چرخ پروانه کوچک در آن نقطه در درون شاره متحرک اندازه گرفت.

دوران چرخ پروانه کوچک، مقیاسی برای تاو خواهد بود.

اگر $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ باشد، $\mathbf{V}$ را غیر چرخشی می‌نامند. نیروهای گرانشی و الکترواستاتیک مثال‌هایی از بردارهای غیر چرخشی در فیزیک می‌باشند.

اگر برداری غیر چرخشی باشد می‌توان آن را به صورت **منفی گرادیان یک پتانسیل اسکالر** بنویسیم.

برای موج‌های محیط کشسان؛

- اگر جابه‌جایی $\mathbf{u}$ **غیر چرخشی** باشد، $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ و امواج تخت (یا امواج کروی در فاصله‌های زیاد) طولی می‌شوند مانند امواج زمین لرزه اولیه P .

- اگر جابه‌جایی $\mathbf{u}$ **سیملوله‌ای** باشد، $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ و امواج عرضی می‌شوند مانند امواج زمین لرزه کندتر و ثانویه S .

یکی از کاربردهای تاو، در رابطه میدان مغناطیسی ناشی از یک چگالی جریان است:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

مثال ۱-۱۰- اگر f تابعی اسکالر و $\mathbf{V}$ یک تابع برداری باشد، نشان دهید:

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f\nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V}$$

تمرین ۱۴- حاصل عبارت $\nabla \times \mathbf{r}f(r)$ را به دست آورید.

$$\nabla \cdot (a \times b) = b \cdot (\nabla \times a) - a \cdot (\nabla \times b)$$

تمرین ۱-۱۵- ثابت کنید:

تمرین ۱-۱۶- نشان دهید اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ غیر چرخشی باشند، $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ سیملوله‌ای است.

تمرین ۱-۱۷- تابع برداری $\mathbf{f}(x, y, z)$ غیر چرخشی نیست ولی حاصل ضرب $\mathbf{f}$ در تابع اسکالر $g(x, y, z)$ غیر چرخشی است. نشان دهید:

$$\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$$

۸-۱- انتگرال گیری برداری

۱- انتگرال خطی

انتگرال خطی بردار $\mathbf{F}$ به صورت مقابل بیان می شود:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{یا} \quad \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

a و b نقاط ابتدا و انتها روی منحنی C هستند و $d\mathbf{l}$ بردار تغییر مکان بی نهایت کوچک در امتداد منحنی C می باشد.

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ کمیتی نرده ای است بنابراین حاصل انتگرال گیری نیز کمیتی نرده ای خواهد بود مانند:

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

در رابطه بالا، W کار انجام شده در جابه جایی از a تا b می باشد که یک کمیت نرده ای است.

۲- انتگرال سطحی

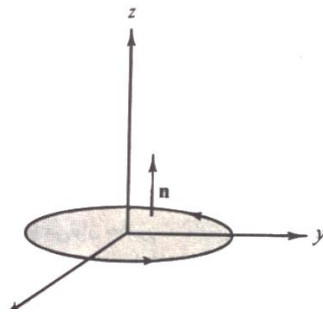
انتگرال سطحی بردار $\mathbf{F}$ به صورت مقابل بیان می شود:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\sigma} \quad \text{یا} \quad \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

$d\mathbf{\sigma}$ نیز مانند $d\mathbf{l}$ کمیتی برداری است و $\mathbf{n}$ بردار یکه عمود بر سطح و در جهت مثبت است.

شاخص جهت مثبت:

- برای سطح بسته: عمود برون سو
- برای سطح باز: انگشتان دست راست در جهت پیمایش منحنی و انگشت شست جهت مثبت عمود را مشخص می کند.



شکل ۱-۶- قاعده دست راست برای جهت

قائم مثبت

۳- انتگرال حجمی

اگر $\mathbf{F}$ یک بردار و φ یک کمیت نرده ای باشد، انتگرال حجمی به صورت مقابل بیان می شود:

$$J = \int_V \varphi dv \quad \text{و} \quad K = \int_V \mathbf{F} dv$$

J یک کمیت نرده ای و K یک بردار است.

۹-۱- تعریف انتگرالی گرادیان، دیورژانس و تاو

۱- گرادیان هر کمیت اسکالر عبارت است از حد انتگرال سطحی آن کمیت نرده ای در واحد حجم، هر گاه حجم محصور توسط آن سطح به

سمت صفر میل کند.

$$\nabla \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \varphi \mathbf{n} da$$

۲- دیورژانس هر کمیت برداری عبارت است از حد انتگرال سطحی آن کمیت برداری در واحد حجم، هر گاه حجم محصور توسط آن سطح

به سمت صفر میل کند.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

انتگرال دیورژانس یک بردار در حجم V ، برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم آن بردار روی سطح بسته دربرگیرنده حجم V .

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

- به قضیه دیورژانس، قضیه گاوس نیز می گویند.

۳- تاو هر بردار عبارت است از حد نسبت انتگرال سطحی ضرب برداری آن بردار در بردار یکه عمود بر سطح بسته به حجم محصور به وسیله آن سطح بسته، هر گاه حجم محصور توسط آن سطح به سمت صفر میل کند.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} da$$

انتگرال خطی یک بردار روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم تاو آن بردار روی هر سطحی که توسط این منحنی محصور شده باشد.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

۱۰-۱- عملیات تکمیلی

۱-۱-۱ $\nabla \cdot \nabla \varphi$

دیورژانس یک گرادیان را لاپلاسی می نامند.

اگر φ پتانسیل الکترواستاتیکی باشد، داریم:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

یعنی دیورژانس گرادیان یک میدان نردهای برابر صفر است. رابطه فوق همان معادله لاپلاس در مبحث الکترواستاتیک است.

- لاپلاسی، یک عملگر نردهای است که شامل مشتق گیری نسبت به بیش از یک متغیر است.

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

۲-۱-۱ $\nabla \times \nabla \varphi$

عبارت بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

از رابطه بالا نتیجه می گیریم که: تاو گرادیان هر کمیت نردهای برابر صفر است یعنی همه گرادیان ها غیر چرخشی اند.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \quad -3$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0.$$

از رابطه بالا نتیجه می گیریم که: دیورژانس هر تاو برابر صفر است یعنی همه تاوها سیملوله ای اند.

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad \text{و} \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad -4$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{F}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

• یکی از کاربردهای رابطه بالا، استخراج معادله موج الکترومغناطیس است.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad \text{تمرین ۱-۱۸- ثابت کنید:}$$

تمرین ۱-۱۹- $\nabla^2 \varphi = 0$ صدق می کند. نشان دهید که $\nabla \varphi$ هم سیملوله ای و هم غیر چرخشی است. φ یک تابع اسکالر است که در معادله لاپلاس $\nabla^2 \varphi = 0$ صدق می کند. نشان دهید که $\nabla \varphi$ هم سیملوله ای و هم غیر چرخشی است.