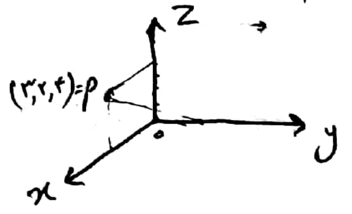
فصل اول : بردارها

کمیت بدون جهت : کمیتی است که فقط بزرگی آن مورد نظر ماست مثل طول، حجم، زمان، دما و ......

کمیت برداری جهت : کمیتی است که غیر از بزرگی آن جهت آن هم مورد نظر ماست مثل شتاب، نیرو و شدت میدان الکتریکی ......

فضای سه بعدی : برای نمایش هر نقطه در فضا سه محور دو به دو عمود بر هم را که از یک نقطه ثابت می‌گذرند را در نظر می‌گیریم این نقطه ثابت را مبدا در نظر می‌گیریم و با $\vec{O}$ نشان می‌دهیم



نکته : اگر P را نقطه ای از فضا در نظر بگیریم و از آن سه نقطه سه محور عمود بر هم رسم کنیم محورهای x و y و z در نقاط x_0 و y_0 و z_0 قطع می‌شوند و نقطه P را با سه تایی (x_0, y_0, z_0) نمایش می‌دهند.

نکته : هر سه تایی مرتب نمایشگر یک نقطه در فضا خواهد بود و با $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهند.

بردار : هر پاره خط جهت دار در فضا را بردار گویند و دو بردار را مساوی گوییم هرگاه طول و جهت یکسانی داشته باشند.

فاصله دو بردار A و B : هرگاه A و B دو بردار در فضا باشند فاصله A از B به صورت زیر تعریف می‌شود یا همان مولفه دو بردار A و B :

$$\vec{AB} = (x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$$

بردار صفر: برداری که ابتدا و انتهای آن یکی باشد بردار صفر گویند، بردار صفر فاقد طول و جهت است.

$$\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

طول بردار AB : هرگاه A و B دو نقطه از فضا باشند طول بردار $\vec{AB}$ با طول پاره خط AB برابر است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

سوال: اگر $A=(۸,۸,۷)$ و $B=(۴,۲,-۶)$ باشد طول بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بدست آورید؟

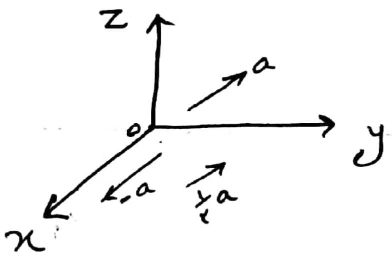
حل :

$$\vec{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(۴-۸)^2 + (۲-۸)^2 + (-۶-۷)^2}$$

$$= \sqrt{(-۴)^2 + (-۶)^2 + (-۱۳)^2} = \sqrt{۱۶+۳۶+۱۶۹} = \sqrt{۲۲۱}$$

ضرب یک عدد در بردار: هرگاه t یک عدد حقیقی و $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ یک بردار باشد $t\vec{a}$ را به صورت زیر تعریف کردند

$$t\vec{a}=(ta_۱,ta_۲,ta_۳)$$



دو بردار موازی: دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ را موازی گویند هرگاه عددی مانند t وجود داشته باشد که $\vec{a}=t\vec{b}$

اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی دارای مولفه‌های غیر صفر باشند داریم $\dfrac{a_۱}{b_۱}=\dfrac{a_۲}{b_۲}=\dfrac{a_۳}{b_۳}$

• سوال: نشان دهید که چهارضلعی $ABCD$ یک ذوزنقه است؟

$A:(۸,۸,۷)$ $\quad$ $C:(۴,۲,-۶)$

$B:(۲,-۱,-۵)$ $\quad$ $D:(۸,۸,۲)$

حل: از دوران ابتدایی می‌دانیم، چهارضلعی ای یک ذوزنقه است که فقط دو ضلع آن باهم موازی باشد پس کافی است نشان دهیم دو ضلع این چهارضلعی باهم موازی اند کافی است فاصله آن ها برابر باشد

$$\vec{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)=(۲-۸,\ -۱-۸,\ -۵-۷)=(-۶,-۹,-۱۲)$$

$$\vec{CD}=(x_D-x_C,\ y_D-y_C,\ z_D-z_C)=(۸-۴,\ ۸-۲,\ ۲-(-۶))=(۴,۶,۸)$$

$$\frac{-۶}{۴}=\frac{-۹}{۶}=\frac{-۱۲}{۸}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow \vec{AB}\parallel\vec{CD}$$

$$\vec{AD}=(x_D-x_A,\ y_D-y_A,\ z_D-z_A)=(۸-۸,\ ۸-۸,\ ۲-۷)=(۰,۰,-۵)$$

$$\vec{BC}=(x_C-x_B,\ y_C-y_B,\ z_C-z_B)=(۴-۲,\ ۲-(-۱),\ -۶-(-۵))=(۲,۳,-۱)$$

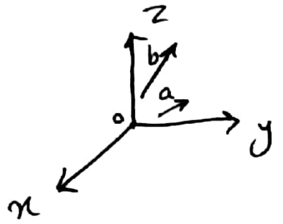
$$\frac{۰}{۲}=\frac{۰}{۳}\neq\frac{-۵}{-۱}\Rightarrow \vec{AD}\nparallel\vec{BC}$$

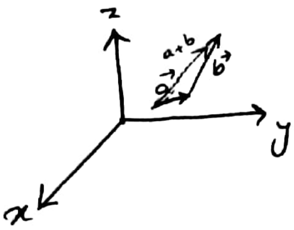
دو بردار موازی اند و دو بردار موازی نیستند پس چهارضلعی ذوزنقه است

جمع دو بردار: هرگاه $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، جمع دو بردار a و b به صورت زیر تعریف می‌شود

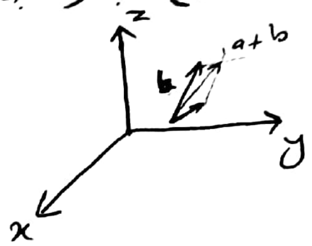
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

نمایش هندسی مجموع دو بردار: مجموع دو بردار به دو صورت زیر نمایش داده می‌شود





روش مثلثی



روش متوازی الاضلاع

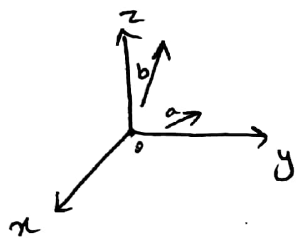
قرینه یک بردار: هرگاه $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ باشد $(-a_1,-a_2,-a_3)$ را قرینه بردار $\vec{a}$ گویند و با $-\vec{a}$ نمایش می‌دهند.

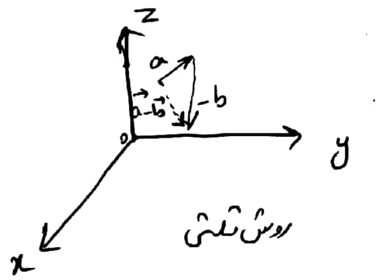
$$\vec{a}+(-\vec{a})=0$$

تفاضل دو بردار: تفاضل دو بردار به صورت زیر تعریف می‌شود

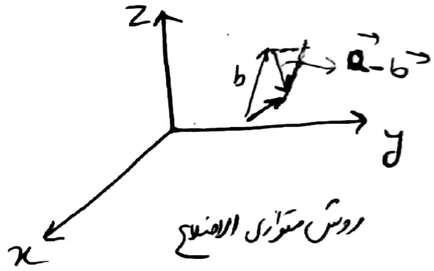
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

نمایش هندسی تفاضل دو بردار:





روش مثلثی

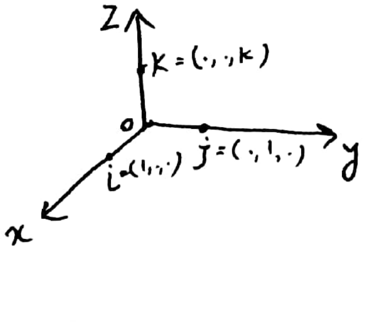


روش متوازی الاضلاع

بردار یکانی: برداری که با $a=(a_1,a_2,a_3)$ موازی و هم‌جهت باشد و طول آن برابر یک باشد بردار یکانی یا بردار یکه $\vec{a}$ نامیده می‌شود و با $\vec{u}_a$ نشان می‌دهند. به عبارتی $\vec{u}_a$ را سوی بردار a نیز گویند و به صورت $\vec{u}_a=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ محاسبه می‌شود.

بردارهای پایه: سه بردار یکانی زیر را بردارهای پایه یا واحد یا یکانی گویند. این بردارها در محاسبات ریاضی از اهمیت زیادی برخوردارند

$i=(1,0,0)$ $\qquad$ $j=(0,1,0)$ $\qquad$ $K=(0,0,K)$



نتیجه: با استفاده از ویژگی های ضرب یک عدد در بردار و جمع و تفریق بردارها هر بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای i و j و K نوشت:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)$$

$$=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{K}$$

سوال: هرگاه $A=(4,3,1)$ و $B=(2,5,7)$ و $C=(-2,4,0)$ سه نقطه از فضا باشند مطلوبست:

۱) مولفه های بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ؟

۲) طول بردار $\overrightarrow{AB}$ ؟

۳) بردار یکانی $\overrightarrow{AB}$ ؟

۴) بردار $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ برحسب بردارهای پایه بنویسید.

حل (۱) مولفه های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

اول $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A , y_B-y_A , z_B-z_A)=(2-4, 5-3, 7-1)=(-2,2,6)$

$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A , y_C-y_A , z_C-z_A)=(-2-4, 4-3, 0-1)=(-6,1,-1)$

حل (۲) طول بردار $\overrightarrow{AB}$

اول $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(2-4)^2+(5-3)^2+(7-1)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(6)^2}=\sqrt{4+4+36}=\sqrt{44}=\sqrt{4\times 11}$

$=2\sqrt{11}$

حل (۳) بردار یکانی $\overrightarrow{AB}$

اول $\overrightarrow{U}_{AB}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2\sqrt{11}}(-2,2,6)=\left(\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{11}}, \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{11}}, \frac{6}{2\sqrt{11}}\right)$

$=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$

حل (۴) بردارهای $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ برحسب بعد

$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(x_B-x_A , y_B-y_A , z_B-z_A)-2(x_C-x_A , y_C-y_A , z_C-z_A)$

$=(2-4, 5-3, 7-1)-2(-2-4, 4-3, 0-1)=(-2,2,6)-2(-6,1,-1)$

$=(-2,2,6)-(-12,2,-2)$

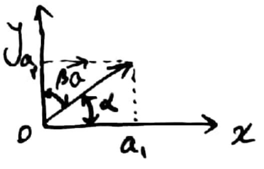
$=(-2-(-12), 2-2, 6-(-2))$

$=(-2+12, 0, 8)$

$=(10,0,8)=10\vec{i}+0\vec{j}+8\vec{k}$

ل $=10\vec{i}+8\vec{k}$

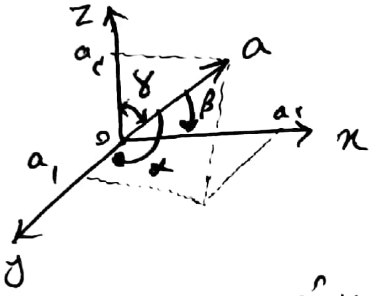
زاویه‌های هادی بردار: هرگاه $a=\langle a_1,a_2\rangle$ یک بردار غیر صفر در صفحه باشد و آن را چنان جابجا کنیم که ابتدای آن بر مبدا مختصات منطبق شود این بردار با جهت مثبت محور x ها و y ها به ترتیب زاویه‌های α و β را می‌سازد این زاویه‌ها را زاویه‌های هادی و کسینوس آن‌ها را کسینوس‌های هادی بردار $\vec{a}$ می‌نامند.



$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}\qquad \cos\beta=\frac{a_2}{|a|}$$

$$\rightarrow\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$$

همین نکته برای فضا هم برقرار است یعنی اگر $a=(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار در فضا باشد این بردار با جهت مثبت محور x ها، محور y ها و محور z ها به ترتیب زاویه‌های α و β و γ را می‌سازد



$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}\qquad \cos\beta=\frac{a_2}{|a|}\qquad \cos\gamma=\frac{a_3}{|a|}$$

نتیجه: بردار یکانی $\vec{a}$ برحسب کسینوس‌های هادی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{u}_a=\frac{1}{|a|}(a_1,a_2,a_3)=\left(\frac{a}{|a_1|},\frac{a_2}{|a|},\frac{a_3}{|a|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

با توجه به اینکه $|\vec{u}_a|=1$ است می‌توان داریم:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

سوال: زاویه‌هایی که بردار $a=(3,2,-6)$ با محورهای مختصات می‌سازد را بیابید؟

حل: منظور همان کسینوس‌های هادی است

$$|a|=\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7$$

$\cos\alpha=\dfrac{a_1}{|a|}=\dfrac{3}{7}\xrightarrow{\text{ماشین حساب}}\alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right)=64{,}62$ زاویه بردار a با محور x ها

$\cos\beta=\dfrac{a_2}{|a|}=\dfrac{2}{7}\xrightarrow{\text{ماشین حساب}}\beta=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{7}\right)=73{,}39$ زاویه بردار a با محور y ها

$\cos\gamma=\dfrac{a_3}{|a|}=\dfrac{-6}{7}\xrightarrow{\text{ماشین حساب}}\gamma=\cos^{-1}\left(\dfrac{-6}{7}\right)=149$ زاویه بردار a با محور z ها

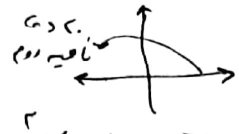
سوال: آیا زاویه‌های $\alpha=45$ و $\beta=60$ و $\gamma=150$ می‌توانند به ترتیب زاویه‌های هادی یک بردار باشند؟

حل: شرط اینکه α و β و γ زاویه‌های هادی یک بردار باشند این است که $\leftarrow$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$$\cos\alpha=\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\beta=\cos 60=\frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma=\cos 150=\cos(180-30)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}\neq 1$$

پس γ و β و α نمی‌توانند زاویه‌های هادی یک بردار باشند.

سوال: با فرض $A=(2,3,-1)$ و $B=(2,1,0)$ و $C=(4,1,2)$ بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ را مشخص کنید!

سوال: با فرض اینکه $\vec{a}=(2,1,3)$ و $\vec{b}=(-1,2,2)$ طول بردارهای $2\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+3\vec{b}$ را محاسبه کنید؟

سوال: بردار برآیند بردارهای $a=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $b=2\vec{i}+4\vec{j}$ را بنویسید؟

سوال: زاویه‌های هادی بردار $a=(2,4,-1)$ را بنویسید؟

سوال: آیا ممکن است که برداری با محورهای مختصات زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ و ۱۲۰ بسازد؟ چرا؟

ضرب داخلی دو بردار (نام دیگر این ضرب، ضرب نقطه‌ای یا ضرب عددی هم می‌باشد)

هرگاه a و b دو بردار باشند و θ زاویه بین آن دو باشد ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود ← $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$

نکته: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند در این صورت ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$a=(a_1,a_2,a_3)$

$b=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

ویژگی های ضرب داخلی:

۱- حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است.

۲- همواره داریم ← $a\cdot b=b\cdot a$ خاصیت جابجایی در ضرب داخلی برقرار است

۳- برای هر عدد حقیقی t داریم ← $(t\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(t\vec{b})=t(\vec{a}\vec{b})$

۴- همواره داریم ← $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ ، $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

۵- همواره داریم ← $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ، $\cos 0=1$

۶- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و تنها اگر: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (زیرا $\cos 90=0$)

سوال: دو بردار $a=(2,3,t)$ و $b=(-4,2,1)$ داده شده‌اند مقدار t را چنان تعیین کنید که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند

$a\cdot b=0$ ← شرط عمود بودن

$$a\cdot b=(2\times -4)+(3\times 2)+(1\times t)=0 \rightarrow -8+6+t=0$$

$$-2+t=0$$

$$\boxed{t=2}$$

مثال: اگر a و b دو بردار با طول های ۲ و ۳ و زاویه بین ۱۲۰° باشند طول بردار $2a-b$ را با استفاده از ویژگی ضرب داخلی بدست آورید؟

حل:

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = (2\vec{a}-\vec{b}).(2\vec{a}-\vec{b})$$ طبق خاصیت ۵

$$= (2\vec{a}-\vec{b}).2\vec{a} - (2\vec{a}-\vec{b}).\vec{b}$$ طبق خاصیت ۴

$$= 2\vec{a}.2\vec{a} - \vec{b}.2\vec{a} - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b}$$ طبق خاصیت ۴

$$= 4\vec{a}.\vec{a} - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b}$$ طبق خاصیت ۲ و ۳

$$= 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|.\cos 120 + |\vec{b}|^2$$ طبق خاصیت ۵ و تعریف ضرب داخلی

$$= 4(2)^2 - 4(2)(3)(-\tfrac{1}{2}) + (3)^2 = 37$$

$$\Rightarrow |2a-b|^2 = 37 \xrightarrow{\text{جذر}} |2a-b| = \sqrt{37}$$

محاسبه زاویه بین دو بردار: اگر θ زاویه بین دو بردار غیر صفر a و b باشد به کمک ضرب داخلی دو بردار می‌توان زاویه را پیدا کرد

$$a.b = |a||b|\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{a.b}{|a||b|}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|a||b|}$$

مثال: زاویه بین دو بردار $a = 2\vec{j} + \vec{k}$ و $b = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ را پیدا کنید.

$$a.b = 0(2) + 2(-3) + (1)(2) = -4$$

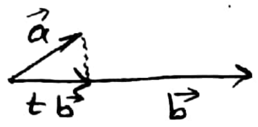
$$|a| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad |b| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

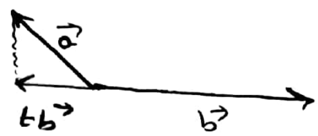
$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} = \frac{-4}{\sqrt{5}\sqrt{17}} \longrightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{85}} = 115{,}71$$

سوال: اگر $a = (2,-1,5)$ و $b = (0,2,1)$ باشد زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورید؟

تصویر یک بردار روی بردار دیگر: در شکل زیر بردار $t\vec{b}$ را تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ یا مؤلفه $\vec{a}$ در جهت $\vec{b}$ می‌گیرند و با نماد $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$ نشان می‌دهند.

فرمول
$$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)\vec{b}$$





به همین ترتیب تصویر b روی a هم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\right)\vec{a}$$

سوال: فرض کنید که $a = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ را به دست آورید سپس تصویر b بر a را به دست آورید؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6-2+0 = 4$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 2^2+2^2 = 8$$

$$\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 3^2+(-1)^2+2^2 = 14$$

$$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)\vec{b} = \frac{4}{14}\vec{b} = \frac{4}{14}(3,-1,2) = \frac{2}{7}(3,-1,2)$$

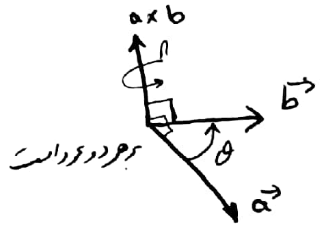
$$\text{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\right)\vec{a} = \frac{4}{8}\vec{a} = \frac{1}{2}(2,2,0) = (1,1,0)$$

سوال: اگر $a = (2,5,7)$ و $b = (3,0,-1)$ باشد تصویر بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ را به دست آورید سپس حاصل ضرب داخلی $a.b$ را پیدا کنید؟

ضرب خارجی دو بردار

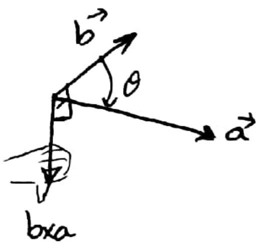
فرض کنید که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و غیر موازی باشند این دو بردار صفحه ای را در فضا مشخص می‌کنند به این دو بردار، بردار دیگری را نسبت می‌دهیم که آن را با $a\times b$ نمایش می‌دهیم و آن را ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم

بردار $a\times b$ دارای ویژگی‌های زیر است



الف) بر صفحه شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است

ب) جهت آن از قانون دست راست تبعیت می‌کند



ج) طول آن برابر است با

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$$

نکته: اگر حداقل یکی از دو بردار $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ صفر باشد داریم $\vec{a}\times\vec{b}=0$

نکته: اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند داریم $\vec{a}\times\vec{b}=0$

ویژگی‌های ضرب خارجی:

۱) همواره داریم: $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

۲) اگر t عدد حقیقی باشد $(t\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(t\vec{b})=t(\vec{a}\times\vec{b})$

۳) همواره داریم

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

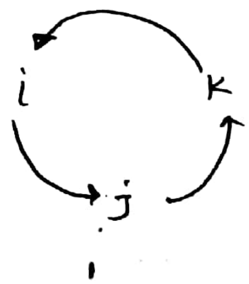
۴) ضرب خارجی بردارهای پایه به صورت زیر است

$$\vec{i}\times\vec{j}=-(\vec{j}\times\vec{i})=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=-(\vec{k}\times\vec{j})=\vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=-(\vec{i}\times\vec{k})=\vec{j}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$



نکته مهم: به کمک تعریف دترمینان ماتریس، می‌توان محاسبات ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر نمایش داد

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

یادآوری دترمینان: به هر ماتریس مربعی یک عدد به صورت زیر نسبت می‌دهند که آن را دترمینان ماتریس می‌نامند. دترمینان ماتریس های ۲×۲ و ۳×۳ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad \det(A)=|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\qquad \det(A)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

سوال: با فرض $a=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ و $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ بردارهای $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{j}$ را به دست آورید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

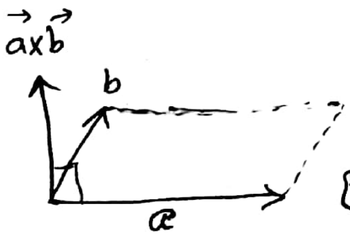
$$=(-2\times-1+1\times3)\vec{i}-(1\times-1-2\times3)\vec{j}+(1\times1-2(-2))\vec{k}=-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-2\times0-1\times3)i-(1\times0-0\times3)j+(1\times1-0\times-2)k$$

$$=-3\vec{i}+\vec{k}$$

نکته مهم: مساحت متوازی الاضلاع برابر طول بردار $a\times b$ می‌باشد.



$S=|a\times b|$ مساحت متوازی الاضلاع

• **سوال:** با دو بردار $a=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ و $b=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ متوازی الاضلاعی ساخته‌ایم. مساحت متوازی الاضلاع حاصل را حساب کنید.

$$a\times b=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & +3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(2-3)i-(-1-6)j+(1+4)k$$

$$a\times b=-i+7j+5k$$

$$S=|a\times b|=\sqrt{(-1)^2+(7)^2+(5)^2}=\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=5\sqrt{3}$$

نکته: می دانیم که مساحت مثلث برابر نصف مساحت متوازی الاضلاع می باشد پس برای بدست آوردن مساحت مثلث خواهیم داشت:

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$$

• سوال: مساحت مثلث ABC به رأس های $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$ را بدست آورید؟

حل: هرگاه سه نقطه دارد باید فاصله آن دو ضلع را بدست آوریم AB, AC

$$AB=(x_B-x_A , y_B-y_A , z_B-z_A)$$
$$AB=(3-1 , 0-2 , -3-0)=(2,-2,-3) \rightarrow \boxed{AB=(2,-2,-3)}$$

$$AC=(x_C-x_A , y_C-y_A , z_C-z_A)=(5-1 , 2-2 , 6-0)=(4,0,6) \rightarrow \boxed{AC=(4,0,6)}$$

$$S=\frac{1}{2}|AB\times AC| \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left((-12+0)i-(12+12)j+(0+8)k\right)$$
$$=\frac{1}{2}(-12i-24j+8k)=-6i-12j+4k$$
$$=\sqrt{(-6)^2+(-12)^2+(4)^2}$$
$$=\sqrt{36+144+16}=\sqrt{196}=14$$

نکته: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند عبارت $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ را ضرب عددی یا ضرب مختلط سه برداری گویند

نکته: حجم هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند حجم متوازی السطوحی که توسط این سه بردار می توان تصور کرد به صورت زیر است

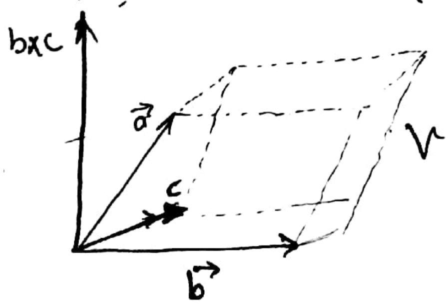
$$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$ حجم متوازی السطوح

* فرمول بالایی *

حجم متوازی السطوح
$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

نکته: اگر $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ شود سه بردار هم صفحه هستند و اگر $a\cdot(b\times c)\neq 0$ شود سه بردار هم صفحه نمی باشند.

نکته: در حالتی که زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ منفرجه باشند عدد مربوط به ارتفاع در حجم، منفی خواهد شد که در این حالت برای محاسبه حجم از قدر مطلق استفاده می کنیم



$$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

نکته: متوازی السطوح یک شش وجهی است که وجه های مقابل آن باهم موازی اند

ویژگی های ضرب عددی سه بردار:

۱- اگر a و b و c سه بردار باشند که در یک صفحه قرار گرفته اند داریم $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

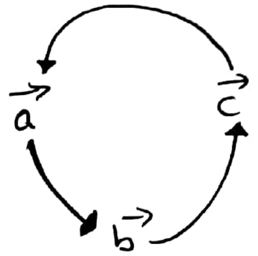
۲- همواره داریم $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

۳- حاصل ضرب عددی سه بردار در تبدیل دایره ای عوامل آن تغییر نمی کند ولی جابجایی دو بردار علامت را تغییر می دهد.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{a}(\vec{c}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}(\vec{a}\times\vec{c})$$



سوال: حجم جعبه ای که توسط سه بردار زیر ساخته می شود را بدست آورید

$a=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ $\quad b=-2\vec{i}+3\vec{k}$ $\quad c=7\vec{j}-4\vec{k}$

حل: این جعبه حجم یک متوازی السطوح می باشد

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-2&0&3\\0&7&-4\end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix}0&3\\7&-4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&3\\0&-4\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-2&0\\0&7\end{vmatrix}$$

$$=-21-16+14=-23$$

$$\text{حجم } V=|a\cdot(b\times c)|=|-23|=23$$

سوال: آیا سه بردار زیر هم صفحه اند؟ $a=(2,3,-1)$ $\quad b=(1,-1,3)$ $\quad c=(1,9,-11)$

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-1&3\\1&+9&-11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&3\\9&-11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&3\\1&-11\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-1\\1&9\end{vmatrix}=-32+42-10=0$$

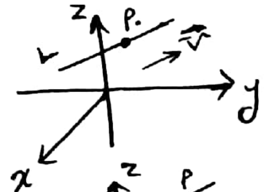
چون $a\cdot(b\times c)=0$ شده است پس این سه بردار هم صفحه اند ■

سوال: مساحت مثلث و متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار $\vec{a}=3\vec{j}-2\vec{k}$ و $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$ تولید می شود را بدست آورید.

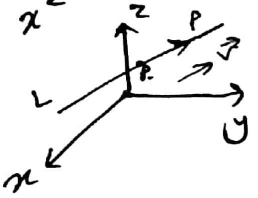
هندسه تحلیلی در فضا: فصل دوم

معادله خط در فضا:

همان طور که در دوران دبیرستان داشتیم معادله خط در صفحه را که یک نقطه و شیب آن را می‌نوشتیم و شکل کلی آن به صورت $y-y_0=m(x-x_0)$ بوده است. حال می‌خواهیم معادله خط L را که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v}(a,b,c)$ موازی است بنویسیم. اگر $P(x,y,z)$ نقطه دیگری از خط باشد بردارهای $\overrightarrow{PP_0}$ و $\vec{v}$ باهم موازی اند لذا عددی حقیقی مانند t موجود است که



$$\overrightarrow{P_0P}=t\cdot\vec{v}$$



$$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=t(a,b,c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=at\\ y-y_0=bt\\ z-z_0=ct\end{cases}\quad t\in R \Rightarrow \begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\quad t\in R$$

* معادلات پارامتری خط

نکته: در معادله خط، بردار $\vec{v}=(a,b,c)$ را بردارهای هادی و مقادیر a، b و c را پارامترهای هادی می‌نامند.

— سوال * معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(2,3,7)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v}=3\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$ موازی است.

$(x_0,y_0,z_0)=(2,3,7)$

$(a,b,c)=(3,-5,2)$

$$\text{فرمول}\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\quad t\in R \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \begin{cases}x=2+3t\\ y=3-5t\\ z=7+2t\end{cases}\quad t\in R$$

سوال * معادله خطی بنویسید که از نقطه $(1,-2,7)$ می‌گذرد و با خط $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ موازی است.

سوال: سه نقطه نام ببرید که روی خط L به معادلات پارامتری زیر واقع باشند

$$L: (x = 3 - 2t \ , \ y = 7 + 2t \ , \ z = 3 + 4t)$$

$$t = 0 \rightarrow P_1 = (x = 3 - \cancel{2\times 0} \ , \ y = 7 + \cancel{2\times 0} \ , \ z = 3 + \cancel{4\times 0}) = (3, 7, 3)$$

$$t = 1 \rightarrow P_2 = (x = 3 - 2\times 1 \ , \ y = 7 + 2(1) \ , \ z = 3 + 4(1)) = (1, 9, 7)$$

$$t = 2 \rightarrow P_3 = (x = 3 - 2(2) \ , \ y = 7 + 2(2) \ , \ z = 3 + 4(2)) = (-1, 11, 11)$$

سوال: کدام یک از نقاط $A = (14, -17, 15)$ و $B = (-4, 13, 5)$ روی خط زیر قرار دارد؟

$$L: (x = 2 + 3t \ , \ y = 3 - 5t \ , \ z = 7 + 2t)$$

حل:

$$A = (14, -17, 15) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \begin{cases} 14 = 2 + 3t \rightarrow \underline{t = 4} \\ -17 = 3 - 5t \rightarrow t = 4 \\ 15 = 7 + 2t \rightarrow t = 4 \end{cases} \qquad A \in L$$

$$B = (-4, 13, 5) \rightarrow \begin{cases} -4 = 2 + 3t \rightarrow \underline{t = -2} \\ 13 = 3 - 5t \rightarrow \underline{t = -2} \\ 5 = 7 + 2t \rightarrow \underline{t = -1} \end{cases} \qquad B \notin L$$

سوال: معادله خطی بنویسید که از دو نقطه $A = (2, 1, 0)$ و $B = (4, 2, 5)$ بگذرد.

حل: ابتدا بردار $\overrightarrow{AB}$ را حساب می‌کنیم

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \ , \ y_B - y_A \ , \ z_B - z_A) = (4 - 2, 2 - 1, 5 - 0) = (2, 1, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} = (\overset{a}{2}, \overset{b}{1}, \overset{c}{5})$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \xrightarrow[A = (2, 1, 0)]{\text{یکی از A یا B را به دلخواه انتخاب می‌کنیم}} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 1t \\ z = 0 + 5t \end{cases}$$

معادله متعارف خط:

$$x = x_0 + at \rightarrow t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$y = y_0 + bt \rightarrow t = \frac{y - y_0}{b}$$

$$z = z_0 + ct \rightarrow t = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

سوال: معادله متقارن خطی که از نقطه $(۴-,۳,۲)$ بگذرد و با بردار $v=(۳,۵,۲)$ موازی باشد را بنویسید؟

حل:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \rightarrow \frac{x-۲}{۳}=\frac{y-۳}{۵}=\frac{z+۴}{۲}$$

* فاصله یک نقطه از یک خط:

$$d=\frac{|v\times AB|}{|v|}$$

سوال: فاصله نقطه $A=(۵,-۶,۲)$ را از خط L بدست آورید:

$$L=(x=1+\underset{a}{0t},\ y=-1+\underset{b}{۴}t,\ z=۲\underset{c}{-۳}t)$$

حل: ابتدا $t=0$ قرار دهیم و نقطه B را می‌یابیم:

$$t=0 \rightarrow B=(1,-1,۲)$$

حال AB را بدست می‌آوریم

$$\vec{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_c-z_A)$$

$$AB=(1-۵,\ -1-(-۶),\ ۲-۲) \longrightarrow AB=(-۴,۵,0)$$

و ضرایب t در خط همان بردار v هستند

$$v=(0,۴,-۳) \longleftarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & ۴ & -۳ \\ -۴ & ۵ & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۴ & -۳ \\ ۵ & 0 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & -۳ \\ -۴ & 0 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & ۴ \\ -۴ & ۵ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=۱۵\vec{i}+۱۲\vec{j}+۱۶\vec{k}$$

$$d=\frac{|v\times\vec{AB}|}{|v|}=\frac{\sqrt{۱۵^۲+۱۲^۲+۱۶^۲}}{\sqrt{0^۲+۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{\sqrt{۶۲۵}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

وضعیت دو خط در فضا:

موازی: اگر بردارهای هادی دو خط موازی باشند گوییم دو خط موازیند

متقاطع: اگر دو خط نقطه مشترکی داشته باشند گوییم که دو خط متقاطع اند

متنافر: اگر دو خط موازی نباشند و نقطه مشترکی هم نداشته باشند گوییم متنافرند.

مثال: وضعیت دو خط L_1 و L_2 را نسبت به هم بررسی کنید

$$L_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{6} \qquad L_2: \frac{2x+5}{4} = \frac{4y-2}{8} = \frac{z+2}{3}$$

حل: ابتدا بردار هادی دو خط را می‌نویسیم بردارهای هادی همان اعداد مخرج است به شرطی که x و y و z ضریب نداشته باشند اگر زمانی که ضریب داشته باشند باید عملیاتی انجام دهیم تا آن‌ها را بدون ضریب کنیم

صورت x و y و z ضریب ندارد

$$L_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{6} \longrightarrow v_1 = (4, 4, 6)$$

$$L_2: \frac{\cancel{2}x+5}{\frac{4}{2}} = \frac{\cancel{4}y-2}{\frac{8}{4}} = \frac{z+2}{3} \xrightarrow[\text{صورت و مخرج را تقسیم می‌کنیم}]{\text{ضریب دارد}} \frac{\frac{2}{2}x+\frac{5}{2}}{\frac{4}{2}} = \frac{\frac{4}{4}y-\frac{2}{4}}{\frac{8}{4}} = \frac{\frac{z}{1}+\frac{2}{1}}{\frac{3}{1}}$$

$$\rightarrow \frac{x+\frac{5}{2}}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z+2}{3}$$

$$\Rightarrow v_2 = (2, 2, 3)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{4}{2} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}\right) = 2 \Longrightarrow \vec{v_1} \parallel \vec{v_2} \rightarrow L_1 \parallel L_2$$

سوال: وضعیت دو خط L_1 و L_2 را بررسی کنید

$$L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1} \longrightarrow v_1 = (2, 1, -1)$$

$$L_2 = \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2} \longrightarrow v_2 = (1, -2, 2)$$

$$\Longrightarrow \text{مقایسه} \quad \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{2} \Longrightarrow v_1 \nparallel v_2 \rightarrow L_1 \nparallel L_2$$

حدس می‌زنیم که ممکن است دو خط متقاطع باشند بررسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{معادلات پارامتری را می‌نویسیم}} L_1: \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t-2 \\ z = -t+2 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = s+1 \\ y = -2s \\ z = 2s \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{تشکیل می‌دهیم}]{\text{دستگاه}} \begin{cases} 2t+2 = s+1 \\ t-2 = -2s \\ -t+2 = 2s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t-s = -1 \\ t+2s = 2 \\ -t-2s = -2 \end{cases}$$

حل

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{matrix} 2t-s = -1 \\ t+2s = 2 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} t = 0 \\ s = 1 \end{matrix}}$$

اگر $t=0$ و $s=1$ را در معادلات پارامتری دو خط L_1 و L_2 قرار دهیم

$$L_1: \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t-2 \\ z = -t+2 \end{cases} \xrightarrow{t=0} (x, y, z) = (2, -2, 2) \qquad L_2: \begin{cases} x = s+1 \\ y = -2s \\ z = 2s \end{cases} \xrightarrow{s=1} (x, y, z) = (2, -2, 2)$$

که جواب‌ها درست است پس دو خط متقاطع‌اند و نقطه مشترک $(2, -2, 2)$ را دارند.

مثال: وضعیت دو خط زیر را نسبت به هم بررسی کنید

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{4} \qquad L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

$$v_1 = (2, 3, 4) \qquad v_2 = (3, 2, 1)$$

مقایسه $\rightarrow \frac{v_1}{v_2}: \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{4}{1}$ ، $v_1 \nparallel v_2$ یعنی $\rightarrow L_1 \nparallel L_2$

ممکن است دو خط متقاطع یا متنافر باشند بررسی می‌کنیم

معادلات پارامتری خط L_1
$$\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t-2 \\ z = 4t+1 \end{cases}$$

معادلات پارامتری خط L_2
$$\begin{cases} x = 3s-1 \\ y = 2s+1 \\ z = s \end{cases}$$

حال دستگاه تشکیل می‌دهیم با مساوی قرار دادن هر کدام:

$$\begin{cases} 2t+3 = 3s-1 \\ 3t-2 = 2s+1 \\ 4t+1 = s \end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} 2t-3s = -4 \\ 3t-2s = 3 \\ 4t-s = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} \begin{array}{l} t = -1 \\ s = -3 \end{array}$$

حال در $t=-1$ و $s=-3$ را در معادلات پارامتری قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t-2 \\ z = 4t+1 \end{cases} \xrightarrow{t=-1} \begin{array}{l} x = -2+3 = 1 \\ y = -3-2 = -5 \\ z = -4+1 = -3 \end{array} \qquad (1, -5, -3)$$

$$\begin{cases} x = 3s-1 \\ y = 2s+1 \\ z = s \end{cases} \xrightarrow{s=-3} \begin{cases} x = -10 \\ y = -5 \\ z = -3 \end{cases} \qquad (-10, -5, -3)$$

مساوی نشد
یعنی متقاطع نیست
$\boxed{}$ متنافرند

Scanned by CamScanner

معادله صفحه در فضا: فرض کنید که $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطه معلومی از صفحه P و بردار غیر صفر $n(a,b,c)$ بر صفحه عمود باشد

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

معادله فوق را معادله صفحه می نامند

سوال: معادله صفحه ای که از نقطه $(\overset{x_0}{-2},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{3})$ می گذرد و بر بردار $u=(\overset{a}{2},\overset{b}{5},\overset{c}{-1})$ عمود است را بنویسید

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$2(x-(-2))+5(y-1)+(-1)(z-3)=0$$

$$2(x+2)+5(y-1)-1(z-3)=0$$

$$2x+\underbrace{4+5y-5}\underbrace{-z+3}=0$$

$$2x+5y-z+2=0$$

نکته: یک صفحه شامل تعداد نامتناهی نقطه است

سوال: یک صفحه به صورت $P: 2x+y-z=5$ داریم سه نقطه روی این صفحه نام ببرید؟

توضیح: کافی است در معادله صفحه دو متغیر را به دلخواه انتخاب کنیم و با حل معادله متغیر سوم را به دست آوریم

دلخواه $x=0,\ y=0$ $\quad 2x+y-z=5 \rightarrow -z=5 \rightarrow \boxed{z=-5}$

$A(0,0,-5)$

دلخواه $x=0,\ z=0$ $\quad \cancel{2x}+y-\cancel{z}=5 \rightarrow y=5$

$B(0,5,0)$

دلخواه $x=3,\ z=2$ $\quad 2x+y-z=5 \rightarrow 2\times 3+y-2=5$

$4+y-2=5$

$y=3$

$C=(3,[illegible],2)$

$A=(1,2,3)$

$B=(-2,3,1)$

$C=(-1,4,2)$

— سوال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه زیر بگذرد

حل: $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را حساب می‌کنیم

$$\vec{AB}=(-2-1,\ 3-2,\ 1-3)=(-3,\ 1,\ -2)$$

$$AC=(-1-1,\ 4-2,\ 2-3)=(-2,\ 2,\ -1)$$

سپس حاصل ضرب خارجی را بدست می‌آوریم

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=+i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\underset{a}{3}\vec{i}+\underset{b}{1}\vec{j}-\underset{c}{4}\vec{k}$$

حال یکی از نقاط A، B، C را به دلخواه انتخاب می‌کنیم فرض $A=(\underset{x_0}{1},\ \underset{y_0}{2},\ \underset{z_0}{3})$

معادله صفحه $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$3(x-1)+1(y-2)+(-4)(z-3)=0$$

$$3x-3+y-2-4z+12=0$$

$$3x+y-4z+7=0$$

$$3x+y-4z=-7$$

فرمول: فاصله یک نقطه از یک صفحه: فاصله نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ به صورت زیر حساب می‌شود

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

— سوال: فاصله نقطه $(\underset{x_0}{1},\underset{y_0}{0},\underset{z_0}{2})$ از صفحه $\underset{a}{4}x-\underset{b}{2}y+\underset{c}{3}z=1$ را بدست آورید؟

$$\underset{a}{4}x-\underset{b}{2}y+\underset{c}{3}z-\underset{d}{1}=0$$

$$h=\frac{|4\times1-2\times0+3\times2-1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|4-0+6-1|}{\sqrt{16+4+9}}=\frac{9}{\sqrt{29}}$$

سوال: وضعیت خط و صفحه زیر را بررسی کنید

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

$$P: 2x - y + 3z = 1$$

حل: خط را برابر با t قرار می‌دهیم:

$$\frac{x-1}{2} = t \longrightarrow x = 2t+1$$

$$\frac{y+1}{3} = t \longrightarrow y = 3t-1$$

$$\frac{z-1}{2} = t \longrightarrow z = 2t+1$$

حال x و y و z را در معادله صفحه قرار می‌دهیم

$$2x - y + 3z = 1 \longrightarrow 2(2t+1) - (3t-1) + 3(2t+1) = 1$$

$$4t + 2 - 3t + 1 + 6t + 3 = 1$$

$$7t + 6 = 1 \rightarrow \boxed{t = \frac{-5}{7}}$$

پس خط و صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند

$$x = 2t+1 \xrightarrow{t=\frac{-5}{7}} x = 2\times\frac{-5}{7} + 1 = \frac{-3}{7}$$

$$y = 3t-1 \xrightarrow{t=\frac{-5}{7}} y = 3\times\frac{-5}{7} - 1 = \frac{-22}{7}$$

$$z = 2t+1 \xrightarrow{t=\frac{-5}{7}} z = 2\times\frac{-5}{7} + 1 = \frac{-3}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{7}, \frac{-22}{7}, \frac{-3}{7}\right)$$

سوال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از مبدا مختصات بگذرد و با صفحه $2x - 3y + 3z = 1$ موازی باشد.

$$\underbrace{2x}_{a} \underbrace{-3y}_{b} \underbrace{+3z}_{c} \underbrace{-1}_{d} = 0 \qquad (0,0,0) \text{ مبدا}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$2(x - 0) + (-3)(y - 0) + 3(z - 0) = 0$$

$$2x - 3y + 3z = 0$$

سوال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه $A=(1,2,0)$ و $B=(0,0,2)$ بگذرد و بر صفحه $x+y+3z=0$ عمود است:

$$\overrightarrow{AB}=(0-1,\ 0-2,\ 2-0)=(-1,-2,2) \qquad , \ n=(1,1,3)$$

$$m=\overrightarrow{AB}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$m=\underbrace{-8}_{a}\vec{i}+\underbrace{5}_{b}\vec{j}+\underbrace{1}_{c}\vec{k}$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

یک نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم: $B=(0,0,2)$

$$-8(x-0)+5(y-0)+1(z-2)=0$$

$$-8x+5y+z-2=0 \rightarrow \underline{-8x+5y+z=2}$$