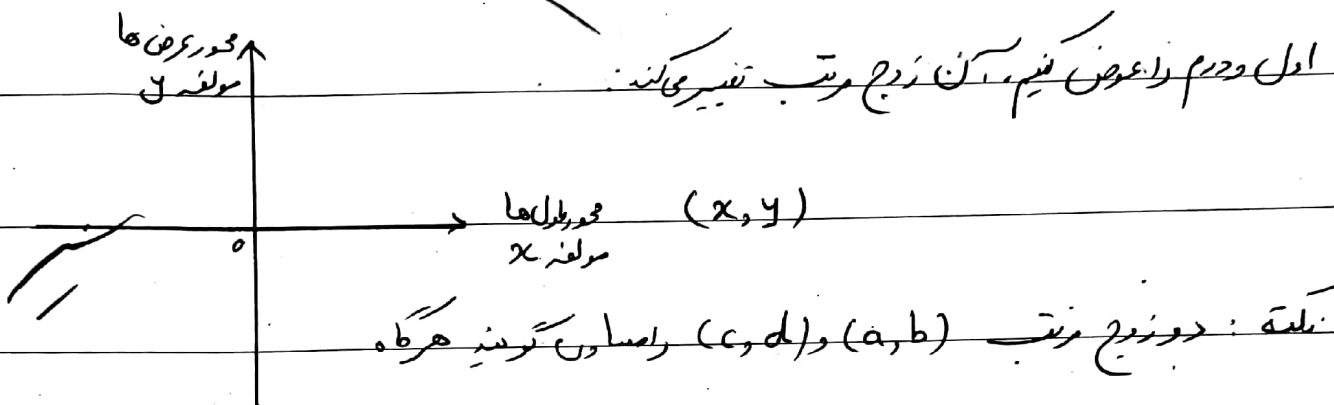


فصل اول تابع

زوج مرتب: هر دو تایی از اعداد حقیقی بصورت (a, b) که در آن a و b مهم باشند و زوج

مرتب می نامیم که اول و دوم را مولفه اول و دوم می نامند یعنی اینست که اگر در یک زوج مرتب جای مولفه های



نکته: دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) را مساوی گوئیم هرگاه

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c, b = d$$

سوال: دو زوج مرتب زیر برابر می باشند مقدار m, n را بدست آورید.

$$(2m + 3n, 3m - 2n), (1, -1)$$

$$\begin{cases} 2m + 3n = 1 \\ 3m - 2n = -1 \end{cases} \xrightarrow{2x} \begin{cases} 2m + 3n = 1 \\ 6m - 4n = -2 \end{cases} \xrightarrow{3x} \begin{cases} 2m + 3n = 1 \\ 9m - 4n = -2 \end{cases}$$

$$13m = 13 \rightarrow m = 1$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله بعدی}} 3n + 3m = 1 \xrightarrow{m=1} 3n + 3(1) = 1 \rightarrow 3n = -2 \rightarrow n = -\frac{2}{3}$$

$$(m, n) = (1, -\frac{2}{3})$$

سوال: دو زوج مرتب زیر برابر می باشند مقدار a, b را بیابید؟

$$(2a - b, 3), (3, a + 3b)$$

تابع: تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که هیچ دو زوج متمایز آن مولفه اول یکسان نداشته باشند.

به عبارتی اگر در یک زوج مرتب مولفه اول تکراری نباشد پس آن زوج مرتب یک تابع است ولی اگر

در یک زوج مرتب مولفه اول تکراری باشد به مولفه دوم نگاه می‌کنیم اگر مولفه دوم هم تکراری باشد تابع است

در غیر این صورت تابع نیست. تابع است که $f = \{(2, 5), (3, 7), (-5, 6)\}$

تابع نیست $g = \{(7, 1), (-3, 2), (6, 9), (7, 5)\}$ ^{مقایسه}

تابع است $h = \{(5, 3), (1, 4), (6, 9), (-1, 7), (5, 3)\}$ ^{مقایسه}

چون یکی تکراری است پس خط می‌خورد

سوال: مجموعه زیر یک تابع است مقدار مجهول m را بدست آورید

$$f = \{(2, 3), (0, 5), (4, 1), (m^2 + 4m, 0)\}$$

مولفه‌های اول آن‌ها مساوی است پس مولفه دوم را می‌توانیم قرار دهیم

حل:

$$m^2 + 4m = 0 \rightarrow m^2 + 4m - 0 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه اعداد}} (m+5)(m-1) = 0$$

$m+5=0$
 $m=-5$

$m-1=0$
 $m=1$

تمرین: کدام یک از مجموعه‌های زیر تابع است و کدام تابع نیست؟

الف $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$

ب $g = \{(1, 3), (2, 5), (2, 1)\}$

ج $h = \{(2, 5), (5, 2), (3, 2), (2, 3), (0, 0)\}$

تمرین: اگر مجموعه زیر یک تابع باشد مقدار k را حساب کنید؟

$$f = \{(1, 3), (2, 0), (4, 7), (1, k^2 - 2k)\}$$

تمرین: مجموعه زیر یک تابع است مقدار a و b را بدست آورید؟
 $f = \{(5, a+2), (6, 9), (5, -8), (6, 2b-1)\}$
 $f = \{(5, 3), (5, -1), (3, 5), (a-2, b+3), (5, a-2), (a-1, 2)\}$

دامنه و برد: مجموعه مولفه های اول زوج های مرتب یک تابع را دامنه (حوزه تعریف) و مجموعه مولفه های دوم آن را برد (حوزه مقادیر) می نامند. دامنه را با D و برد را با R نشان می دهند

$$f = \{(1, 2), (2, 0), (3, -1), (0, 3)\} \rightarrow D_f = \{1, 2, 3, 0\}$$

$$R_f = \{2, 0, -1, 3\}$$

تمرین: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید؟
 $f = \{(3, 2), (5, 2), (-3, 2), (2, 2), (1, 2)\}$

تمرین: دو تابع بنویسید که دامنه و برد آن ها یکسان باشند ولی هیچ دو زوج مرتب آن ها یکسان نباشد؟

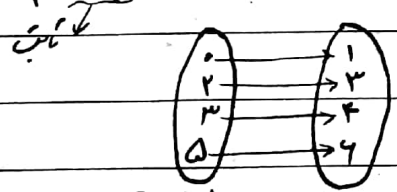
* ضابطه تابع: در واقع باید بین مولفه های اول و دوم زوج های مرتب یک ارتباط برقرار باشد در واقع در هر تابع باید رابطه ای باشد که طول هر زوج مرتب را به عرض آن تبدیل کند
 به عبارت دیگر ضابطه ای تابع است که هر عضو دامنه را به یک عضو مجموعه برد از دید نظر داند

$$f: D \rightarrow R$$

$$y = f(x)$$

مثال: در تابع $f = \{(2, 3), (3, 4), (1, 2), (5, 2)\}$ مولفه دوم هر زوج یک واحد از مولفه اول آن بیشتر است پس ضابطه ی آن به صورت زیر می شود

$$f = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$$



سوال: تابعی را بنویسید که هر عضو از اعداد صحیح را دو برابر کند

$$f: R \rightarrow R$$

$$y = f(x) = 2x$$

تابع چند ضابطه‌ای: طاقی اوقات لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد مثل تابع دو ضابطه‌ای زیر

$$f(x) = \begin{cases} m(x) & x \in D_m \\ n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

در این صورت دامنه تابع با اجتماع دامنه تمام ضابطه‌های آن

$$D_f = D_m \cup D_n, \quad D_m \cap D_n = \emptyset$$

برابر است

موضوع برخی از توابع چند ضابطه‌ای:

الف) تابع قدر مطلق: تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه‌ای است که دامنه و بردش به صورت زیر

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تعریف و نمودار

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}, x < 0\} \quad R_f = \{y \mid y \geq 0\}$$

ب) تابع علامت یا sgn : یک تابع سه ضابطه‌ای است

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$D_s = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$$

$$R_s = \{1, 0, -1\}$$

نکته: صورت دیگر تابع علامت به صورت زیر است:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ج) تابع جزء صحیح یعنی $f(m) = [m]$ یک تابع دو ضابطه‌ای است

اگر x عدد صحیح باشد $[x] = x$ با خود x برابر است مثلاً $[5] = 5$

اگر x عدد صحیح نباشد $[x]$ بزرگترین عدد صحیح قبل از x برابر است

$$[-3.5] = -4$$

$$[2.5] = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \text{ صحیح باشد} \\ [x] & x \text{ صحیح نباشد} \end{cases}$$

مقدار یک تابع: در تابع f $(-2, 5)$ و $(-1, 4)$ و $(0, 3)$ و $(1, 5)$ مقدار تابع در نقطه $x=2$ برابر 5 است

و آن را به صورت $f(2) = 5$ بیان می کنند. اگر معادله تابع معلوم باشد برای تبیین مقدار تابع در نقطه x

از دانستن آن کافی است مقدار x را در معادله تابع بجای x جایگزین کنیم پس $f(x) = f(x)$

سوال: اگر $f(x) = -x^2 + 3x$ و $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$ باشد معادله های زیر را کامل کنید

$$f(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) = -2 \quad \Rightarrow \quad 3f(2) = 3(-2^2 + 3 \times 2) = 0$$

$$g(2) = 3(2)^2 - 3(2) + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad f(-1) + g(2) =$$

و پس مقدار $\frac{f(4) + g(2)}{g(0)}$ را محاسبه کنید؟

سوال: با توجه به تابع مقابل مقادیر زیر را بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & x \geq 2 \\ |x| & x < 2 \end{cases}$$

۱) $f(-4.5) =$

۳) $f(-4) =$

۲) $f(\sqrt{2}) =$

۴) $f(3) =$

۵) $f(1.8) =$

روشن نشد حیف تابع جدول یک ضابطه یا معادله:

طبق تعریف واضح است که اگر f یک تابع بوده و $(a, b) \in f$ و $(a, c) \in f$ و $b \neq c$

$$\begin{aligned} (a, b) \in f \\ (b, c) \in f \end{aligned} \Rightarrow b = c$$

به عبارتی به x مقدار دخیل می دهیم اگر برای آن مقدار دخیل یک y بدست آید به تابع است
اگر برای x دخیل دو مقدار مختلف برای y بدست آید به تابع نیست

• سوال: کدام یک از قطارهای زیر تابع است؟ ۲ جا ۴

جواب: $x=0$ $\rightarrow y=1$ $\rightarrow y=1$

✓ (۱، ۲) با جابجایی

فیل با دهن $x = 0$ مصفاک صند $a = 1$ ن بیک اند

3) $y = x^3 - 2$ حل: $x = 1$ $\checkmark$ $y = 1^3 - 2 = 1 - 2 = -1$ ✓

باداوان ۱-۲ مقامی مدرس (۱-۱)

3) $x^2 + y^2 = 1$ حل: $x = 0$ $\xrightarrow{\text{حالت 1}}$ $0 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 \xrightarrow{\text{حالت 2}}$ $y = \pm 1$

$$\begin{matrix} & (-, 1) \\ & \swarrow \\ (-, -1) \end{matrix}$$

تابع من باسد

محل بادا لن $x=0$ دو مقدار مختلف $y=1$ و $y=-1$ براس حایب است که بد است

نکته: هرگاه λ در معادلات توان زوج داشته باشد و یا آنکه λ در داخل قدر مطلق باشد آن معادله را

تابع می باشد چون با مقدار (۱۰۰) که در جدول مقدار مختلف برای آن به دست می آید

f) $y = |m| + r$ (g) $x = a \xrightarrow{U_0} y = |a| + r = a + r = 1 \checkmark$

$$(a, \wedge)$$

d) $|y| + |x| = 0$

ج) $n=2$ $|y| + |r| = a \rightarrow |y| + r = a$

$$|y| = 0.2$$

$$|y| = r$$

۳ = لا انقدر مطلق بالدرع خلف بيرون كما في

$$(r, r), (r, -r) \times \text{--- in } \mathbb{R}^2$$

تقرین: کدام یک از صفات اول زیر تابع است؟ چرا؟

$$1) y = \frac{3x-1}{x+a}$$

2) $y = x^2 + 1^2 x$

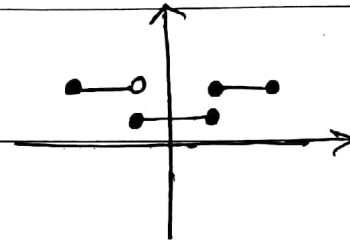
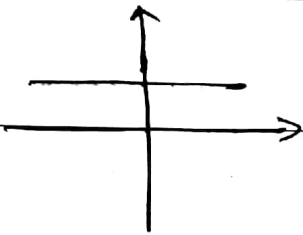
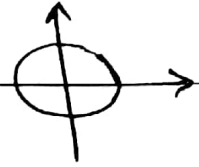
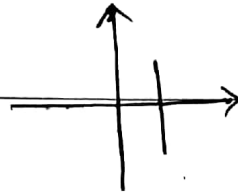
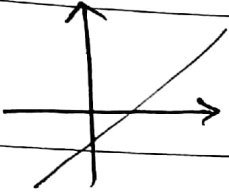
$$r) |y| + 1 = \omega x$$

f) $1 + \sqrt{y} = x$

تشخیص تابع از روی نمودار: یک نمودار مربوط به یک تابع است هر خط موازی محورهای مختصات (ازها)

نمودار واحد اکثر در یک نقطه قطع کند

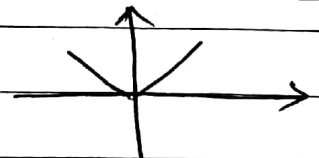
سوال: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نشان می دهد؟



رسم: ۱ - نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x > 1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید سپس دامنه و بردار مشخص کنید.

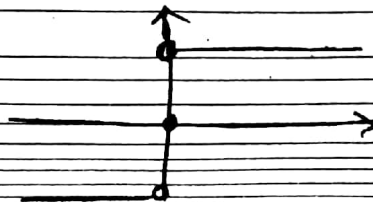
۲ - نمودار تابع قدر مطلق را رسم کنید سپس دامنه و بردار مشخص کنید $D = R \quad R = [-1, +\infty)$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



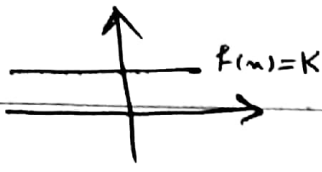
۳ - نمودار تابع علامت را رسم کنید سپس دامنه و بردار مشخص کنید $D_F = R \quad R_F = \{-1, 0, 1\}$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

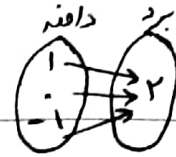


معرفی برخی از توابع خاص

الف) تابع ثابت: یک تابع را ثابت گویند هرگاه برداشتن مقادیر مختلفه داشته باشد



مقادیر تابع ثابت $f(m) = K$



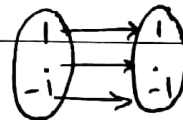
مثال:

تمرین:

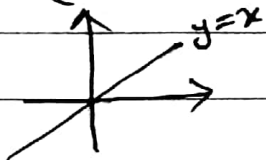
ب) تابع هانی: یک تابع را هانی گویند هرگاه هر عضو از دایره را به همان عضو از برد نظیر کنند

$$f(m) = x$$

مقادیر تابع هانی



نکته: طبق تعریف دایره در برد توابع هانی با هم برابر اند و نمودار تابع هانی نیز ساز ربع اول و سوم در نقاط مشخصه اند



$$D_F = R_F$$

مثال:

تمرین:

ج) تابع قدر مطلق: همان طوری که قبلاً گفتیم تابع قدر مطلق یک تابع دوفاز برای است.

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & p(x) \geq 0 \\ -p(x) & p(x) < 0 \end{cases}$$

$$D_f = R \quad R_f = x \geq 0 \quad \text{یا} \quad (x+0)$$

سوال: توابع قدر مطلق زیر را رسم کنید.

۱) $y = -|x+1| - 5$

۲) $y = 2|x-4| + 1$

تمرین: توابع زیر را رسم کنید.

$y = |x+3| - 4$

۲) $y = 5|x-1| + 3$

د) توابع جزء صحیح: همان طوری که قبلاً گفتیم تابع جزء صحیح یک تابع دوفاز برای است.
 جزء صحیح x بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

$$[x] = n \iff n \leq x < n+1$$

همادلات جزء صحیح زیر را حل کنید.

الف) $[x+1] + [x+4] = 1$

ب) $[x+1] + [x-2] = 8$

حل) $[x] + 1 + [x] - 2 = 8$

$$2[x] - 1 = 8$$

$$2[x] = 9$$

$$\frac{2[x]}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow [x] = 4$$

$$\rightarrow 4 \leq x < 5$$

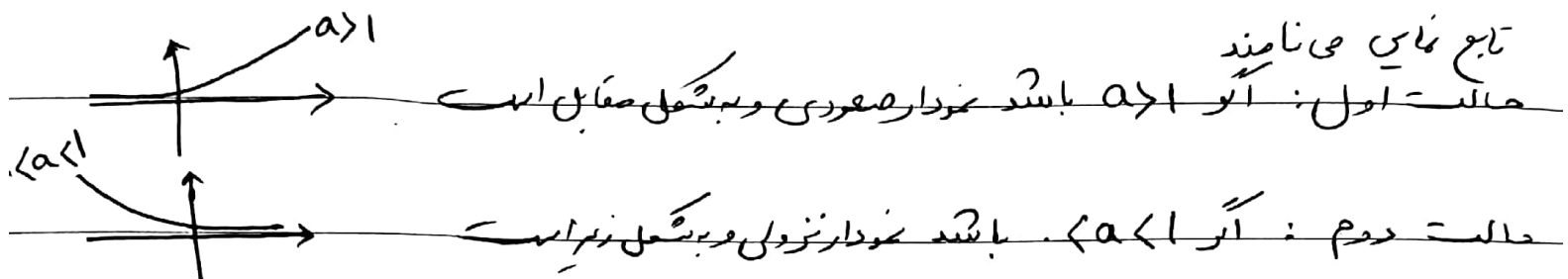
$$2) \quad [n] + [n-2] = 12$$

حل) $[n] + [n-2] = 4$

$$[n] + [n] - 2 = 4$$

$$2[n] = 4 + 2 \rightarrow 2[n] = 6 \rightarrow [n] = 3 \Rightarrow 3 < n < 4$$

هـ) تابع نمایی: $y = a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد را می‌نامند



نکته: اگر پایه تابع نمایی عدد بی‌نهایت $(e = 2.71)$ باشد آن را تابع نمایی طبیعی می‌نامند

در ادامه و بر روی توابع نمایی:

سوال: توابع نمایی زیر را رسم کنید

و) تابع نگارشی: نگاریم عدد مثبت b در مبنای عدد مثبت a مخالف یک a عددی مانند x است که اگر a

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

$$b, a, b > 0, a \neq 1$$

به توان x برسد حاصل برابر b شود

$$\log_2^1 = 3 \iff 2^3 = 8 \quad \text{مثال}$$

$$\log_2^{14} = 4 \iff 2^4 = 14$$

مثال: معادله نگارشی زیر را حل کنید

$$1) \log_{\sqrt{}}^{49} = 2x-1 \quad \text{حل} \quad \sqrt[2x-1]{49} = 7$$

$$\sqrt[2x-1]{49} = 7^2 \rightarrow 2x-1=2 \rightarrow 2x=2+1 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۲)

روابط نگارشی:

$$\log_a x + \log_a b = \log_a^{ab} x$$

۱- جمع نگاریم هار یک مبنای

$$\log_a x - \log_a b = \log_a^{\frac{a}{b}} x$$

۲- تفریق نگاریم هار یک مبنای

$$\log_a^x b = x \log_a b$$

۳- نگاریم اعداد تواندار

$$\log_a^{\frac{a}{x^m}} = \frac{1}{m} \log_a x$$

۴- نگاریم مبنای تواندار

$$\log_a^{\frac{a}{b}} = \frac{\log_a x}{\log_b x}$$

۵- تغییر مبنای نگاریم

$$\log_a x = \log_b x \rightarrow a=b$$

۶- دو نگاریم مساوی با مبنای برابر

نکته: نگاریم روی اعداد منفی تعریف نمی شود.

نکته: نگاریم صفر نامعین است.

• سوال: معادله زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 x = 1$

ب) $\log_2^{x-1} + \log_2^{x+1} = \log_2^{35}$

ج) $\log_3^{3-x} + \log_3^{1-x} = \log_3^5 - \log_3^2$

تعیین دامنه بعضی از توابع حقیقی.

۱- دامنه هر تابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است. $\Rightarrow D_f = R$

مثال: دامنه تابع زیر R می‌باشد.

$f(x) = x+1 \rightarrow D = R$

$f(x) = -2 \rightarrow D = R$

$f(x) = x^5 + 2x^3 + \frac{2}{3}x - 1$
 $D = R$

۲- دامنه هر تابع کسری مجموعه اعداد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج است.

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad D_f = \{x \in R \mid q(x) \neq 0\}$

سوال: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = \frac{3x}{1-2x}$

ب) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$

ج) $f(x) = \frac{-5}{x^2+5x+2}$

د) $f(x) = \frac{5x}{x^2+2}$

۳- دامنه هر تابع را در کتابی با فرجه زده (تابع اعظم) مجموعه اعداد حقیقی است. به ازای آن سوال حقیقی باشد

$$f(m) = \sqrt[r]{p(m)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid p(m) \geq 0\}$$

الف) $f(m) = \sqrt{4-2x}$

ب) $f(m) = \sqrt{9-x^2}$

مثال:

ج) $f(m) = \sqrt{x-5}$

د) $f(m) = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x^2-9x+2}}$

ه) $f(m) = \frac{5}{\sqrt{n-4}}$

مثال: هرگاه تابعی در صورتی باشد
 $f(m) = \frac{q(m)}{\sqrt[r]{p(m)}} \quad D_f = \{p(m) > 0 \mid m \in \mathbb{R}\}$

۴- دامنه عبارت را با فرجه فرد با دامنه عبارت زیر را در کتابی برابر است

$$f(m) = \sqrt[r+1]{p(m)} \Rightarrow D_f = D_p$$

مثال ۱) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$
 صفر صفر

مثال ۲: $y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x+2}}$ کسری است $\rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2\}$

مثال ۳: $y = \sqrt{x^2-2x}$

مثال ۴) $g(m) = \sqrt[3]{\frac{-3x}{1-2x}}$

۵- دامنه هر تابع کتابی مجموعه اعداد حقیقی است که به ازای آن سوال شرط های زیر برقرار باشد

$$f(m) = \log_{q(m)} p(m) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(m) > 0 \\ q(m) > 0 \\ q(m) \neq 1 \end{array} \right\} \text{ شرط ها}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid p(m) > 0 \text{ و } q(m) > 0 \text{ و } q(m) \neq 1\}$$

سوال: دامنه توابع زیر را بدست آورید

الف) $f(m) = \log_{1+x} x^2-4$

$$y = \log^{-1} x$$

$$y = \log_x x^{24}$$

۶ - دامنه توابع مثلثاتی

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin p(x) \\ f(x) &= \cos p(x) \end{aligned} \Rightarrow D_f = D_p$$

الف) دامنه توابع سینوس و کسینوس با دامنه زاویه آن ها برابر است

ب) دامنه عبارات تانژانت و کتانژانت

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad D_f \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad D_f \quad x \neq k\pi$$

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید

$$f(x) = \sin(4x^2 - 4x + 1)$$

$$1) f(x) = \cos \frac{5x}{x^2 - 4x + 9}$$

$$2) f(x) = \tan x$$

$$3) f(x) = \cos \sqrt{x - x^2}$$

ترکیب توابع

هوا و f و g دو تابع حقیقی باشند در این صورت ترکیب تابع f و g بدین صورت $f \circ g$ بدست می آید

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

برای تعریف

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال: اگر $f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 6)\}$ و $g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 6)\}$ باشند

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را بدست آورید

ب) تابع $f \circ g$ را مشخص کنید

تمرین: اگر $g(x) = x^3 - 2x$ و $f(x) = 2x - 1$ باشد تابع $g \circ f(x)$ و $f \circ g(x)$ (تسلسل) رسم

نکته: ترکیب دو تابع خاصیت جابجایی ندارد $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

تمرین: اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد مطابق

الف) $f \circ g(x) =$ ب) $g \circ f(x) =$

تابع زوج: تابع f را زوج گویند هرگاه $f(x) = f(-x)$ باشد معنی $\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f$

(ب) به ازای هر x از دامنه داریم $f(-x) = f(x)$

سوال: نشان دهید که تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ زوج است

حل: اولاً که دامنه تابع R است پس دامنه متقارن است

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$$

ثانیاً

نکته: به طور کلی تابع $\sin x$ فرد است و تابع $\cos x$ زوج است

$$\sin(-x) = -\sin x$$

تابع فرد: تابع f را فرد گویند هرگاه $f(x) = -f(-x)$ باشد معنی $\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f$

(ب) به ازای هر x از دامنه داریم $f(-x) = -f(x)$

سوال: نشان دهید که $f(x) = x - \sin x$ یک تابع فرد است

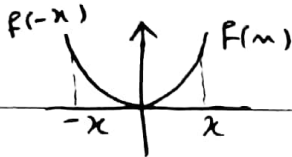
حل: اولاً $D_f = R$ پس دامنه تابع متقارن است

$$f(-x) = (-x) - \sin(-x) = -x + \sin x = -(x - \sin x) = -f(x)$$

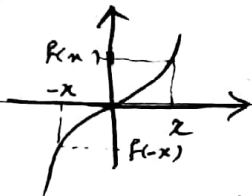
ثانیاً

سوال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

نکته: اگر تابعی هم زوج و هم فرد باشد آن گاه $f(x) = 0$ است.



نکته: نمودار هر تابع زوج نسبت به محور عرض ها متقارن است.



نکته: نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

نکته: تابع ثابت تابعی زوج است و تابع همتای تابعی فرد است.

تابع یک به یک: یک تابع f را یک به یک گوئیم هرگاه به ازای هر عضو از D_f دامنه اش وجود داشته باشد.

$$f = \{(1, 2), (-3, 4), (4, 7), (-1, 5)\} \quad \checkmark \text{ یک به یک}$$

$$g = \{(1, 2), (0, 3), (4, 8)\} \quad \times \text{ یک به یک نیست}$$

برای بررسی یک به یک بودن

نکته: در تابع یک به یک هیچ دو زوج متمایزی با مولفه های دوم برابر وجود ندارد.

نکته: یک تابع یک به یک هست و فقط: $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad \text{if } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

سوال: یک به یک بودن را بررسی کنید.

الف) $f(x) = 2x^3 - 1$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

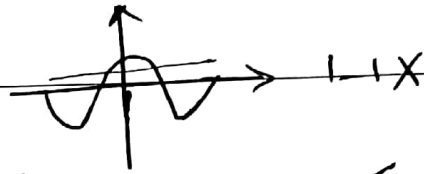
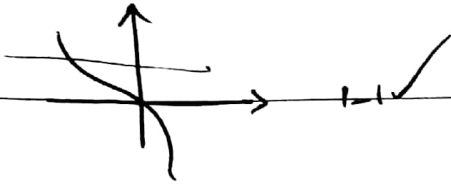
$$2x_1^3 - 1 = 2x_2^3 - 1 \rightarrow 2x_1^3 = 2x_2^3 \rightarrow x_1^3 = x_2^3 \rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \quad 1-1$$

ب) $f(x) = x^2 + 4x$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1^2 + 4x_1 = x_2^2 + 4x_2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow \boxed{x_1 = \pm x_2} \quad 1-1 \times$$

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

نکته: طبق نمودار تابعی ۱-۱ است که هر خط موازی محور طول ها نمودار دارد یک نقطه قطع کند



معمولاً تابع: دو تابع را معکوس می‌کنیم هرگاه ترتیب آن ها تابع هائی باشد

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = x \iff \text{معنی } f \text{ و } g \text{ معکوس اند}$$

سوال: نشان دهید $f(x) = 2x^3 - 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ معکوس می‌باشند.

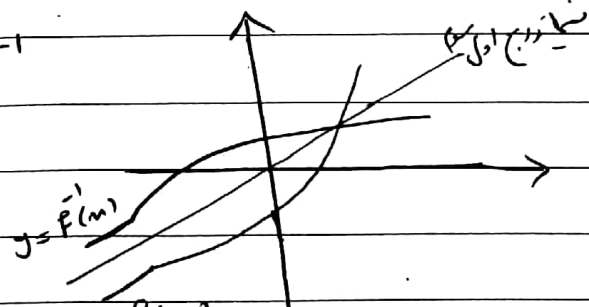
$$f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x+1-1 = x$$

$$g(f(x)) = g(2x^3 - 1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

نکته: اگر f یک تابع باشد معکوس آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم

تجربه: معکوس هر تابع از جایابی صولت هائی درج هار می‌باشد آن بدست می‌آید پس نمودار هر تابع و معکوس آن نسبت به پهنای ربع اول و سوم $(y=x)$ قرینه می‌باشند

$$\frac{D}{f} = \frac{R}{f^{-1}} \quad , \quad \frac{R}{f} = \frac{D}{f^{-1}}$$



نکته: معکوس هر تابع ممکن است خود تابع نباشد

$$f = \{(1, 2), (2, 0), (4, -1), (2, 1)\} \quad \text{تابع}$$

$$f^{-1} = \{(2, 1), (0, 2), (-1, 4), (1, 2)\} \quad \text{تابع}$$

قضیه: تابع f معکوس پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

توی آرایج $f(m) \neq 0$ زوج باشد اگر معکوس پذیر است.

حل: تابع زوج است به محور y هم‌تقارن است پس هر خط موازی محور طول‌ها خود را یک بار در بیش از یک نقطه قطع کند.

پس یک به یک نیست و لزوماً معکوس پذیر نیست.

تجربه: برای این معکوس یک به یک تابع که معادله آن معلوم باشد ابتدا نشان می‌دهیم که تابع معکوس پذیر است پس

مرحله (۱) مقیر x را به y و برگشت تبدیل کنیم. مرحله (۲) مقیر y را به x محاسبه کنیم.

سوال: ثابت کنید که $y = \sqrt{2x-3}$ معکوس پذیر است پس معکوس آن را بیابید.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \sqrt{2x_1-3} = \sqrt{2x_2-3} \rightarrow 2x_1-3 = 2x_2-3 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \sqrt{2x-3} \xrightarrow{y \leftrightarrow x} x = \sqrt{2y-3} \xrightarrow{\text{مربع کردن}} x^2 = 2y-3$$

$$\rightarrow y = \frac{x^2+3}{2}$$

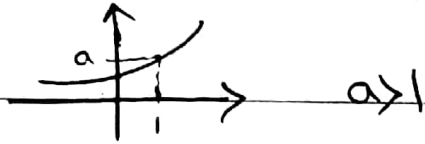
$$f^{-1}(m) = \frac{m^2+3}{2} \quad \text{مرحله آخر}$$

$$\text{سوال: نشان دهید که } f(m) = \frac{2m-5}{m+3} \text{ معکوس پذیر است و معکوس آن را بیابید.}$$

تابع نمایی: تابع $f(x) = a^x$ را می‌خوانند و $a > 1$ و x توان می‌باشد، این توابع نمایی می‌گویند

$$f(x) = a^x \quad a > 1 \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = (0, +\infty)$$

حالت اول: اگر $a > 1$ ، توابع نمایی می‌گویند، بزرگتر از یک باشد $(a > 1)$ تابع نمایی صعودی است و نمودار به شکل زیر است



شکل اول

حالت دوم: اگر $0 < a < 1$ ، توابع نمایی می‌گویند، a بین صفر و یک باشد $(0 < a < 1)$. تابع نمایی نزولی است و به شکل زیر در رسم



$0 < a < 1$

شکل دوم

سوال: نمودار توابع زیر را با رسم جدول، ترسیم کنید

$$y = a^x$$

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

تابع تنازستی: معکوس تابع نمایی $y = a^x$ را تابع تنازستی می‌گویند و با $f(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم در حالت خاص آن

$$\log_a x = \log_a^x \quad \text{تنازستی اعشاری}$$

$$\log_e x = \ln x$$

توجه: در تنازستی طبیعی صیغه عدد $e = 2.718$ می‌باشد و در تنازستی اعشاری صیغه 10 می‌باشد.

* دایره و پر توابع تنازستی به صورت زیر ترسیم می‌شود:

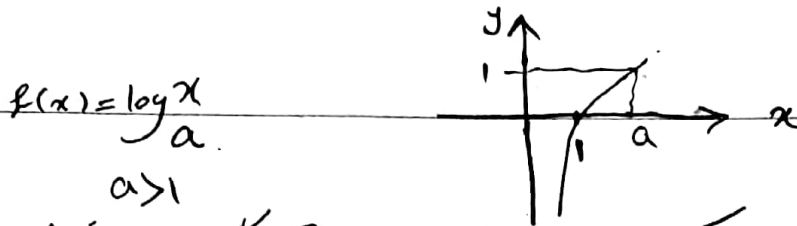
$$f(x) = \log_a x$$

$$D = (0, +\infty)$$

$$R = \mathbb{R}$$

مخودار تابع گسسته

حالت اول: اگر مبدا نزدیک باشد $a > 1$ آن گاه $f(x) = \log_a x$ صعودی خواهد بود و نمودار به صورت



زیر رسم شود

حالت دوم: اگر مبدا، عددی بین صفر و یک باشد $0 < a < 1$. آن گاه $\log_a x$ نزولی خواهد بود و نمودار



آل به شکل زیر خواهد بود

سوال: نمودار تابع گسسته زیر را با تست کردن جدول صفا رسم کنید

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

سوال: حدود a را طوری مشخص کنید که تابع $f(x) = (2-3a)^x$ نزولی باشد

حل: شرط نزولی بودن $0 < a < 1$

$$\rightarrow 0 < 2-3a < 1$$

$$\rightarrow \frac{-2}{-3} < \frac{-2a}{-3} < \frac{-1}{-3}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} < a < \frac{1}{3}$$

سوال: تابع $f(x) = (1-2a)^x$ دارد ریشه است حدود a را طوری مشخص کنید تابع صعودی باشد

حل: شرط صعودی بودن $a > 1$

$$\rightarrow 1-2a > 1$$

$$\rightarrow -2a > 0$$

$$\rightarrow \frac{-2a}{-2} > \frac{0}{-2} \rightarrow \boxed{a < 0}$$

فصل دوم: حد و پیوستگی

تعریف: نقطه حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ موجود در دایره تعریف باشد که داریم

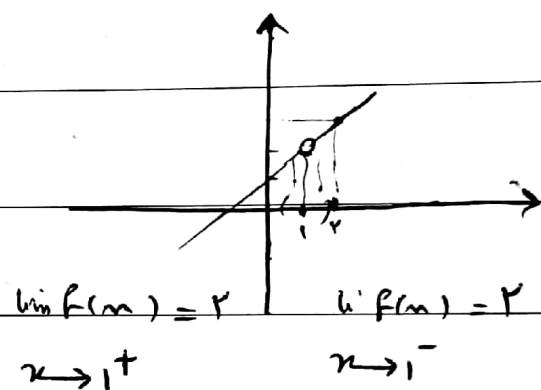
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad : \text{در این صورت } x=a \text{ برابر } L \text{ است و می‌نویسیم}$$

سوال: ابتدا نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ را در نقطه $x=1$ رسم کنید پس بررسی کنید که تابع چه دارایی‌هایی دارد!

$$D_f: x-1=0 \rightarrow x=1 \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

x	1	2
$y = x+1$	2	3



قضایای حد:

قضیه (۱) مقوله a, c دو عدد حقیقی باشند با تابع ثابت $f(x) = c$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

قضیه (۲) مقوله $a \in \mathbb{R}$ و $f(x) = x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

قضیه (۳) مقوله L و K دو عدد حقیقی باشند با تابع $f(x)$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} K f(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x) = K L$$

$$\text{اگر } \lim_{n \rightarrow a} f(n) = L, \lim_{n \rightarrow a} g(n) = L_r \text{ آنگاه } (1) \text{ برقرار است}$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f+g)(n) = \lim_{n \rightarrow a} f(n) + \lim_{n \rightarrow a} g(n) = L_1 + L_r$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f-g)(n) = \lim_{n \rightarrow a} f(n) - \lim_{n \rightarrow a} g(n) = L_1 - L_r$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = \lim_{n \rightarrow a} f(n) \times \lim_{n \rightarrow a} g(n) = L_1 \cdot L_r$$

$$\lim_{n \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(n) = \frac{\lim_{n \rightarrow a} f(n)}{\lim_{n \rightarrow a} g(n)} = \frac{L_1}{L_r}$$

نتیجه (1): اگر $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L$ و $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = L_r$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = L \cdot L_r$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(n))^n = L^n$$

(2) اگر $f(n) = L$ و $g(n) = L_r$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = L \cdot L_r$

$$\lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(a)$$

$$1) \lim_{n \rightarrow a} a = a$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 1^-} a[n] = a[1^-] = a \times 1 = a$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0^+} (\sqrt{n} - n^2) = 0 - 0 = 0$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{x - 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow 2} 2x - 3}{\lim_{n \rightarrow 2} x - 2} = \frac{a}{0} \text{ تعریف نشده}$$

سوال: حدود زیر را محاسبه کنید

قضیه ۵: شرط: $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L$ و n عدد صحیح (طبیعی) باشد اگر n نزدیک به a باشد

داریم
$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

تذکره: اگر n زوج و $L < 0$ باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} \sqrt[n]{f(n)}$ موجود نمی باشد

تذکره: اگر n زوج و $L = 0$ باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} \sqrt[n]{f(n)}$ ممکن است موجود باشد و یا برابر صفر نباشد

در صورتی حد برابر صفر است که در یک مسافتی محدود نقطه $x=a$ تابع f نامتناهی باشد

حد زیر را بیابیم:
$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{x^2 - 8} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 8)} = \sqrt[3]{(-3)^2 - 8} = \sqrt[3]{9 - 8} = \sqrt[3]{1} = 1$$

حد موجود است
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{0^2 + 3 \cdot 0 - 1} = \sqrt{-1}$$

اینجا حد موجود نیست زیرا در مسافتی محدود -2
$$\lim_{n \rightarrow -2} \sqrt{n+2} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow -2} (n+2)} = \sqrt{0}$$
 تابع $f(n) = n+2$ مثبت است و n می تواند نزدیک به -2 باشد و $x < -2$ نامتناهی است

$$\lim_{n \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{0} ?$$

در مسافتی محدود $x=1$ تابع $f(n) = x^2 - 2x + 1 = (n-1)^2 \geq 0$ زیرا در مسافتی نامتناهی است

نکته: شرط حد تابع در یک نقطه ضرورتاً به درآید آن را می توانیم نامید و می توانیم آن را به روش های این

انجام را از طرف دیگر بررسی کنیم و نتوانیم حد موجود است یا عدم موجود است

1. حل) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ محدود زیر این است

پس/یا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$

2. حل) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{1^3 + 1 - 2}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$ محدود

پس/یا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x+1} = \frac{1+1+2}{1+1} = 2$

$$\begin{array}{r} x^3 + x - 2 \quad | \quad x-1 \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - x \\ \hline 2x - 2 \\ \hline 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

3. حل) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = \frac{(-2)^2 - 4}{(-2)^2 + 1} = \frac{0}{5}$ محدود

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{-2-2}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 2 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

4. حل) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ محدود

پس/یا $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$

$$\text{Co 8) } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{1^x - 1}{\sqrt[1]{1} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(x-1)(n+1)}{\sqrt[n]{x} - 1} \times \frac{(\sqrt[n]{x})^n + \sqrt[n]{x} + 1}{(\sqrt[n]{x})^n + \sqrt[n]{x} + 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(n+1)(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} + 1)}{(\sqrt[n]{x})^n + \sqrt[n]{x} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} (n+1)(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} + 1)$$

$$= 2 \times 3 = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$n \rightarrow a$$

$$\lim_{n \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$n \rightarrow a$$

قضية 4: مروب ا و مروب ب

سوال: عدد زير ا و مروب ب

$$\text{الف) } \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 \cos n - 3 \sin n) = 2 \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos n - 3 \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin n = 2 \cos \frac{\pi}{4} - 3 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1}$$

قضية 5: مروب ا و مروب ب

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

عدد زير ا و مروب ب

$$\text{10 Co) } \lim_{t \rightarrow r} \frac{\sin(t-r)}{t-r} = \frac{\sin(r-r)}{r-r} = \frac{0}{0}$$

$$x = t - r$$

تغيير متغير

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{t \rightarrow r} \frac{\sin(t-r)}{t-r} = \frac{\sin(r-r)}{r-r} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t \rightarrow r} \frac{\sin(t-r)}{t-r} = \lim_{t \rightarrow r} \frac{\sin(t-r)}{(t-r)(t+r)} = \lim_{t \rightarrow r} \frac{\sin(t-r)}{t-r} \times \lim_{t \rightarrow r} \frac{1}{t+r}$$

بفرض $x = t-r$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{t \rightarrow r} \frac{1}{t+r}$$

$$= 1 \times \frac{1}{r+r} = \frac{1}{r}$$

$$3) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \sin t}{\frac{d}{dt} t} = \frac{d}{dt} \sin t \bigg|_{t=0} \frac{d}{dt} t \bigg|_{t=0}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x^r \cdot \sin x^p}{x \cdot x^r \cdot x^p} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{1}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^r}{x^r} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^p}{x^p} = \frac{1}{0} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{0}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{\sin n} = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{mn}{\sin(mn)} = \frac{m}{m}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan n}{n} = 1$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan(mn)}{\sin mn} = \frac{m}{n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{\tan n} = 1$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin mn}{\sin n} = \frac{n}{m}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin mn}{mn} = \frac{m}{n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan mn}{\tan n} = \frac{m}{n}$$

قضیه ۱: قضیه فشردگی: اگر تابع f, g, h و h به گونه‌ای باشد که $g(n) \leq f(n) \leq h(n)$ و $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = \lim_{n \rightarrow a} h(n) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) = L$

$$\lim_{n \rightarrow a} g(n) = \lim_{n \rightarrow a} h(n) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) = L$$

سوال: مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x}$ را بیابید.

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 = 0$ پس بر مبنای قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

سوال: اگر $f(n) \rightarrow L$ باشد مقدار $\lim_{n \rightarrow 1} |f(n) + \delta| (n-1)^2$ را بیابید.

$$-(n-1)^2 \leq f(n) + \delta \leq (n-1)^2$$

$$-(n-1)^2 - \delta \leq f(n) \leq (n-1)^2 - \delta$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} (n-1)^2 - \delta = -\delta, \quad \lim_{n \rightarrow 1} (n-1)^2 - \delta = -\delta$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} f(n) = -\delta$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] + 2}{x - 2} = \frac{[2] + 2}{2 - 2} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

حد در $x=2$ را بیابید.

$$-2J6) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

سوال: رابطه a, b را طوری بدست آورید که تابع در $x=3$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ bx^2 - a & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{از چپ} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} bx^2 - a = b(3)^2 - a = 9b - a$$

$$\text{از راست} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + bx - 1 = a(3)^2 + b(3) - 1 = 9a + 3b - 1$$

تابع در $x=3$ حد داشته باشد $\rightarrow$ چپ = راست

$$9b - a = 9a + 3b - 1$$

$$9b - a - 9a - 3b = -1$$

$$9b - 10a = -1$$

سوال: مقدار a, b را طوری تعیین کنید که تابع در $x=1$ و $x=2$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax - b & x < 1 \\ bx^2 - 2a + 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{a(x^2-4)}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

$$x=1, \text{ از چپ} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} bx^2 - 2a + 1 = b(1)^2 - 2a + 1 = b - 2a + 1$$

$$x=1, \text{ از راست} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax - b = 2a(1) - b = 2a - b$$

$$\begin{aligned} b - 2a + 1 &= 2a - b \\ b - 2a - 2a + b &= -1 \\ 2b - 4a &= -1 \end{aligned}$$

$$x=1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{a(x^2-1)}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{a(n-1)(n+1)}{(n-1)} = \lim_{n \rightarrow 1^+} a(n+1) = 2a$$

$$x=1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 1^-} b x^2 - a + 1 = \lim_{n \rightarrow 1^-} b(1)^2 - a + 1 = b - a + 1$$

$$\varepsilon a = \varepsilon b - a + 1$$

$$\varepsilon a - \varepsilon b + a = 1$$

$$** \boxed{va - \varepsilon b = 1}$$

$$*, ** \text{ and } x=1 \rightarrow \begin{cases} vb - a = -1 \\ va - \varepsilon b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} +fb - 1 \cdot a = -1 \\ \underline{va - \varepsilon b = 1} \end{cases}$$

$$\frac{-fa}{-1} = \frac{-1}{-1} \quad \boxed{a = -\frac{1}{-1}} = \frac{1}{1}$$

$$va - \varepsilon b = 1$$

$$v \times \frac{1}{1} - \varepsilon b = 1$$

$$\rightarrow \frac{v}{1} - \varepsilon b = 1 \rightarrow -\varepsilon b = 1 - \frac{v}{1}$$

$$-\varepsilon b = -\frac{v}{1}$$

$$b = \frac{-\frac{v}{1}}{-1} = \frac{v}{1}$$